Nicolae Cotfas **Liviu-Adrian Cotfas**

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

N. Cotfas:
Tel: 074 278 4634
E-mail: ncotfas@yahoo.com
http://fpcm5.fizica.unibuc.ro/~ncotfas/

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI

Pagină lăsată liberă

Pagină lăsată liberă

Pagină lăsată liberă

Introducere

Pe parcursul acestei cărţi ne propunem să oferim o iniţiere în algebra liniară celor interesaţi de utilizarea modelelor matematice în fizică, inginerie şi economie. Prezentarea unor noţiuni şi rezultate referitoare la matrice, determinanţi, spaţii vectoriale, operatori liniari şi produse tensoriale este urmată de aplicaţii în studiul formelor pătratice, conicelor, ecuaţiilor diferenţiale liniare, reprezentărilor liniare ale grupurilor, reprezentărilor liniare ale algebrelor Lie şi în descrierea sistemelor cuantice.

Introducerea unei noţiuni sau prezentarea unui rezultat matematic este pregătită prin exemple adecvate. În cazul unor demonstraţii mai dificile ne-am limitat la analiza unui caz particular sau la prezentarea de exemple care să scoată în evidenţă ideea de bază a demonstraţiei. Împărţirea materialului expus în itemi a permis inserarea unui număr mare de trimiteri atât la definiţii şi teoreme cat şi la diverse comentarii, exemple şi exerciţii. Itemii marcaţi cu * pot fi ocoliţi la o primă lectură.

Cartea se adresează în primul rând studenţilor de la facultăţile de fizică. Se urmăreşte familiarizarea cititorului cu convenţia de sumare a lui Einstein, notaţia lui Dirac, operatorii Pauli, transformarea Fourier finită şi cu produsul tensorial de spaţii şi operatori. Pentru a fi în concordanţă cu terminologia din mecanica cuantică, în loc de spaţiu cu produs scalar finit-dimensional se utilizează termenul de spaţiu Hilbert. În ultimul capitol al cărţii arătăm cum sunt utilizate în mecanica cuantică unele dintre noţiunile şi rezultatele prezentate în capitolele 1-3. Considerăm că studiul sistemelor cuantice cu spaţiu Hilbert finit-dimensional, bazat ca model matematic pe algebra liniară, este adecvat pentru un prim contact al studenţilor cu universul fascinant al fizicii cuantice.

Cartea se bazează pe cursurile predate de primul autor la Facultatea de Fizică, Universitatea din Bucureşti. Noţiunile şi rezultatele teoretice au fost amplu ilustrate de al doilea autor prin inserarea unor exerciţii şi a unor aplicaţii bazate pe programul MATHEMATICA.

Bucureşti, 2015

Nicolae Cotfas
Liviu-Adrian Cotfas

Cuprins

1 Matrice şi determinanţi **11**
1.1 Matrice 11
1.2 Determinanţi 16
1.3 Matrice diagonalizabile 27
1.4 Matrice hermitiene 30
1.5 Matrice unitare şi ortogonale 32
1.6 Produs tensorial de matrice 34

2 Spaţii vectoriale finit-dimensionale **39**
2.1 Spaţii vectoriale 39
2.2 Transformări liniare 59
2.3 Dualul unui spaţiu vectorial 79
2.4 Sume de spaţii vectoriale 82
2.5 Produs tensorial de spaţii vectoriale 88
2.6 Tensori pe un spaţiu vectorial 96

3 Spaţii Hilbert finit-dimensionale **103**
3.1 Spaţii cu produs scalar 103
3.2 Baze ortonormate 109
3.3 Dualul unui spaţiu cu produs scalar 115
3.4 Frame-uri exacte 120
3.5 Spaţii Hilbert 124
3.6 Mulţimi convexe 128
3.7 Adjunctul unui operator liniar 130
3.8 Operatori autoadjuncţi (hermitieni) 134

3.9 Elemente de calcul funcţional 141
3.10 Operatori pozitivi 144
3.11 Proiectori 146
3.12 Transformări unitare şi ortogonale 151
3.13 Transformarea Fourier finită 159
3.14 Transformarea Fourier finită bidimensională 169
3.15 Transformarea Fourier unitară 173
3.16 Elemente ale structurii unui spaţiu Hilbert 178
3.17 Produs tensorial de spaţii Hilbert 186

4 Forme pătratice **193**
4.1 Definiţie şi exemple 193
4.2 Reducerea la forma canonică 196

5 Conice şi cuadrice **203**
5.1 Conice 203
5.2 Reducerea la forma canonică 208
5.3 Cuadrice 212

6 Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare **215**
6.1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi 215
6.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior 221
6.3 Sisteme diferenţiale liniare 231

7 Reprezentări liniare **241**
7.1 Grupuri 241
7.2 Reprezentări liniare 242
7.3 Reprezentări ireductibile 245
7.4 Reprezentări unitare şi ortogonale 247
7.5 Grupul rotaţiilor. Reprezentări liniare 249

8 Algebre Lie **257**
8.1 Algebre Lie 257
8.2 Reprezentări liniare 264
8.3 Reprezentări ireductibile 266

8.4 Reprezentările algebrelor $sl(2,\mathbb{C})$, $su(2)$ şi $o(3)$ 268

9 Sisteme cuantice cu spaţiu Hilbert finit-dimensional 279

9.1 Stări pure şi stări mixte 279
9.2 Sisteme cuantice cu spaţiu Hilbert bidimensional 285
9.3 Măsurători ideale 294
9.4 Măsurători generalizate 302
9.5 Sisteme compuse 306
9.6 Evolutia în timp a stării unui sistem cuantic 324
9.7 Versiuni finit-dimensionale ale oscilatorului armonic 335

Capitolul 1

Matrice şi determinanţi

1.1 Matrice

1.1.1 Definiţie. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Prin *matrice* cu n linii şi m coloane, cu elemente din $\mathbb{K}$, se înţelege o aplicaţie de forma

$$A : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K} : (i, j) \mapsto a_{ij},$$

descrisă uzual cu ajutorul tabloului

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

care conţine valorile functiei. Vom nota cu $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ mulţimea tuturor matricelor cu n linii şi m coloane, cu elemente din $\mathbb{K}$.

1.1.2 O reprezentare alternativă foarte avantajoasă este

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

1.1.3 O notaţie standard pentru elementele matricei A este A_{ij}, respectiv A^i_j, adică

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}, \quad \text{respectiv} \quad A=\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_m \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_m \end{pmatrix}.$$

1.1.4 *Suma* $A+B$ a două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ se defineşte prin relaţia

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix},$$

iar *produsul* dintre un număr $\lambda \in \mathbb{K}$ şi o matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ prin

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

1.1.5 Propoziţie. *Dacă* $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *atunci*

$$(A+B)+C=A+(B+C), \qquad A+B=B+A,$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \qquad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,$$
$$1A=A, \qquad \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A.$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă din

$$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+b_{ij}), \qquad a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij},$$
$$\alpha(a_{ij}+b_{ij})=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}, \qquad (\alpha+\beta)a_{ij}=\alpha\, a_{ij}+\beta\, a_{ij},$$
$$1\, a_{ij}=a_{ij}, \qquad \alpha(\beta a_{ij})=(\alpha\beta)a_{ij}.$$

1.1.6 Produsul AB al matricelor $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ şi $B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ se defineşte prin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\, b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{1j}\, b_{jp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\, b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{nj}\, b_{jp} \end{pmatrix}.$$

Înmulţirea matricelor este definită numai în cazul în care numărul de coloane ale primului factor este egal cu numărul de linii ale celui de al doilea.

1.1.7 Propoziţie. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ *şi* $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, *atunci*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Demonstraţie. Avem

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}\, c_{kl} \right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk} \right) c_{kl}.$$

1.1.8 Propoziţie. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *şi* $B, C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, *atunci*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Demonstraţie. Avem

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, c_{jk}.$$

1.1.9 Propoziţie. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ *şi* $\lambda \in \mathbb{K}$, *atunci*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Demonstraţie. Avem

$$\lambda \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk} = \sum_{j=1}^{m} (\lambda a_{ij}) b_{jk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (\lambda b_{jk}).$$

1.1.10 În cazul unei matrice pătrate A, elementele a_{ii} formează diagonala principală. Dacă singurele elemente nenule sunt cele de pe diagonala principală, A este numită *matrice diagonală*. O notaţie convenabilă este

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

1.1.11 Pentru orice n, *matricea unitate* de ordinul n

$$I \equiv I_n = \operatorname{diag}(1, 1, ..., 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

este element neutru faţă de înmulţirea matricelor

$$AI = IA = A\,, \qquad \text{oricare ar fi } \; A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

1.1.12 Definiţie. O matrice pătrată $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este *inversabilă* dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$AB = BA = I.$$

Matricea B este numită *inversa* lui A şi se notează cu A^{-1}.

1.1.13 Inversa unei matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, dacă există, este unică,

$$\left.\begin{array}{l} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{array}\right\} \implies B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

1.1.14 Pentru o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se definesc puterile întregi prin

$$A^0 = I, \qquad A^k = \underbrace{A\,A\ldots A}_{k\,\text{ori}}, \qquad A^{-k} = \underbrace{A^{-1}\,A^{-1}\ldots A^{-1}}_{k\,\text{ori}}\,.$$

1.1.15 Pentru $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ există AB şi BA, dar, în general,

$$AB \neq BA.$$

De exemplu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.16 Definiţie. *Comutatorul* a două matrice pătrate $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este

$$[A, B] = AB - BA$$

iar *anti-comutatorul* este

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

1.1.17 Matricele Pauli (mai multe notaţii alterantive sunt prezentate)

$$\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţiile

$$[\sigma_1,\sigma_2]=2\mathrm{i}\sigma_3,\qquad [\sigma_2,\sigma_3]=2\mathrm{i}\sigma_1,\qquad [\sigma_3,\sigma_1]=2\mathrm{i}\sigma_2$$
$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=I,\qquad \{\sigma_1,\sigma_2\}=\{\sigma_2,\sigma_3\}=\{\sigma_3,\sigma_1\}=0.$$

1.1.18 Definiţie. *Urma* unei matrice pătrate este suma elementelor de pe diagonala principală

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

1.1.19 Aplicaţia $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})\longrightarrow\mathbb{K}:A\mapsto\mathrm{tr}\,A$ este liniară,

$$\mathrm{tr}\,(A+B)=\mathrm{tr}\,A+\mathrm{tr}\,B,\qquad \mathrm{tr}\,(\alpha A)=\alpha\,\mathrm{tr}\,A,$$

şi ciclică,

$$\mathrm{tr}\,(AB)=\mathrm{tr}\,(BA),\qquad \mathrm{tr}\,(ABC)=\mathrm{tr}\,(BCA)=\mathrm{tr}\,(CAB).$$

În particular, dacă S este o matrice inversabilă, atunci

$$\mathrm{tr}\,(S^{-1}AS)=\mathrm{tr}\,A.$$

1.1.20 Definiţie. Fiecarei matrice i se poate asocia *transpusa*,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}\mapsto {}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}.$$

1.1.21 Aplicaţia $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})\longrightarrow\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}):A\mapsto {}^tA$ este liniară,

$${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB,\qquad {}^t(\alpha A)=\alpha\,{}^tA,$$

şi

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA,\qquad {}^t({}^tA)=A.$$

1.1.22 Definiţie. $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este numită *matrice simetrică* dacă $A={}^tA$, adică

$$a_{ij}=a_{ji},\qquad \text{oricare ar fi}\quad i,j\in\{1,2,...,n\}.$$

$A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este numită *matrice antisimetrică* dacă $A=-{}^tA$.

1.1.23 Orice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este suma dintre o matrice simetrică şi una antisimetrică

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA).$$

1.1.24 În mod uzual, o matrice este definită ca fiind o aplicaţie

$$A : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K},$$

dar în anumite situaţii, o definiţie alternativă poate fi mai avantajoasă. Putem, de exemplu, defini o matrice ca fiind o aplicaţie de forma

$$A : \{0, 1, 2, ..., n\} \times \{0, 1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

sau

$$A : \{-n, -n+1, ..., n-1, n\} \times \{-m, -m+1, ..., m-1, m\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

sau

$$A : (\{0, 1, ..., n\} \times \{0, 1, ..., m\}) \times (\{0, 1, ..., n\} \times \{0, 1, ..., m\}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

1.2 Determinanţi

1.2.1 Definiţie. Prin *permutare* de ordinul n se înţelege o funcţie bijectivă

$$s : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}.$$

descrisă în mod uzual cu ajutorul unui tabel

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}.$$

Notăm cu S_n mulţimea tuturor permutărilor de ordinul n.

1.2.2 Prin *signatura* permutării $s : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$ se înţelege numărul

$$\varepsilon(s) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{s(i) - s(j)}{i - j}.$$

1.2.3 Definiţie. *Determinantul* matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

este numărul

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{s \in S_n} \varepsilon(s)\, a_{1s(1)}\, a_{2s(2)} \cdots a_{ns(n)} \quad (1.1)$$

1.2.4 Exemplu. Avem $S_2 = \{s_1, s_2\}$, unde

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon(s_1) = 1 \quad \text{şi} \quad \varepsilon(s_2) = -1.$$

Determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$$

este

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}. \quad (1.2)$$

1.2.5 Exemplu. Avem $S_3 = \{s_1, s_2, \ldots, s_6\}$, unde

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

şi

$$\varepsilon(s_1) = \varepsilon(s_2) = \varepsilon(s_3) = 1, \qquad \varepsilon(s_4) = \varepsilon(s_5) = \varepsilon(s_6) = -1.$$

Determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$$

este

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \quad (1.3)$$
$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}.$$

1.2.6 Din definiţia (1.1) rezultă că $\det A$ este o sumă de produse de câte n elemente ale matricei A, fiecare produs conţinând un singur element de pe fiecare linie, şi un singur element de pe fiecare coloană.

1.2.7 Din relaţia (1.3) rezultă

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(determinantul unei matrice coincide cu determinantul transpusei). Se poate demonstra ca o astfel de relaţie are loc pentru orice matrice pătrată.

1.2.8 Propoziţie. *Dacă $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, atunci*

$$\det A = \det {}^tA.$$

1.2.9 Din (1.3) rezultă relaţiile

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

(dacă schimbăm între ele două linii semnul determinantului se schimbă),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

(dacă schimbăm între ele două coloane semnul determinantului se schimbă). Se poate demonstra ca un astfel de rezultat este valabil pentru orice matrice pătrată.

1.2.10 Propoziţie. *Dacă se schimbă între ele două linii (sau două coloane) ale unei matrice pătrate, atunci se obţine o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.*

1.2.11 Propoziţie. *Dacă în matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ toate elementele unei linii (sau coloane) sunt nule, atunci* $\det A = 0$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă direct din definiţia (1.1).

1.2.12 Din (1.3) rezultă că

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & a_{13} \\ \alpha_2 & \alpha_2 & a_{23} \\ \alpha_3 & \alpha_3 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Se poate demonstra următorul rezultat mai general.

1.2.13 Propoziţie. *Determinantul unei matrice pătrate cu două linii (sau coloane) identice este nul.*

1.2.14 Propoziţie. *Pentru orice* $k \in \{1, 2, ..., n\}$ *avem*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\, a_{k1} & \lambda\, a_{k2} & \cdots & \lambda\, a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

şi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda\, a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \lambda\, a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda\, a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă direct din definiţia (1.1).

1.2.15 Propoziţie. *Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale, atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din propoziţiile 13 şi 14.

1.2.16 Propoziţie. Avem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & ... & a_{kn}+b_{kn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

şi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1k}+b_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2k}+b_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk}+b_{nk} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & b_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & b_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & b_{nk} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă direct din definiţia (1.1).

1.2.17 Propoziţie. *Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătrate este o combinaţie liniară de celelalte linii (respectiv coloane), atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din propoziţiile 15 şi 16.

1.2.18 Propoziţie. *Dacă la o linie (sau coloană) a unei matrice pătrate adunăm elementele unei alte linii (respectiv coloane) înmulţite cu acelaşi număr determinantul matricei rezultate coincide cu determinantul matricei iniţiale.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din propoziţiile 15 şi 16.

1.2.19 Relaţia (1.3) se poate scrie sub formele

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după prima linie),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după linia a doua),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după linia a treia),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după prima coloană),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după coloana a doua),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după coloana a treia).

1.2.20 Relaţiile anterioare pot fi generalizate şi utilizate în calculul determinanţilor.

1.2.21 Propoziţie. *Fie* $\mathbb{K}$ *unul dintre corpurile* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. *Dacă*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

atunci

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij} \tag{1.4}$$

unde A_{ij} *este matricea care se obţine din* A *eliminând linia* i *şi coloana* j.

1.2.22 Propoziţie. *Oricare ar fi* $i, k \in \{1, 2, ..., n\}$ *avem*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{k+j} \det A_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad i \neq k \\ \det A & \text{dacă} \quad i = k \end{cases} \tag{1.5}$$

notaţiile fiind cele din propoziţia anterioară.

Demonstraţie. În cazul $i = k$ afirmaţia rezultă din propoziţia anterioară. În cazul $i \neq k$ relaţia rezultă dezvoltând după linia k determinantul cu două linii identice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

obţinut înlocuind în

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

linia k cu linia i.

1.2.23 Teoremă. *Matricea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$*, şi inversa ei este*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{2+1} A_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} A_{n1} \\ (-1)^{1+2} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & \cdots & (-1)^{n+2} A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{1+n} A_{1n} & (-1)^{2+n} A_{2n} & \cdots & (-1)^{n+n} A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

notaţiile fiind cele din propoziţiile anterioare.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din propoziţia anterioară.

1.2.24 Sistemul de n ecuaţii liniare cu n necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

se poate scrie sub forma

$$Ax = b$$

dacă se utilizează notaţiile

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1.2.25 Teoremă (Cramer). *Dacă*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci sistemul

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

are soluţia unică

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \qquad \cdots \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Demonstraţie. Scriind sistemul sub forma matriceală

$$Ax = b$$

rezultă ca el are soluţia

$$x = A^{-1}b.$$

Din relaţiile (1.4) şi (1.6) rezultă

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} b_j\,(-1)^{j+1}\,A_{j1} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad ,$$

$$x_n = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} b_j\,(-1)^{j+n}\,A_{jn} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

1.2.26 Exerciţiu. Să se verifice prin calcul direct că în cazul a două matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

avem

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

1.2.27 Se poate arăta că relaţia $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ are loc oricare ar fi matricele A şi B de acelaşi ordin. În particular, în cazul unei matrice inversabile

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

1.2.28 Definiţie. Prin *grup* se înţelege o mulţime G înzestrată cu o lege de compoziţie

$$G \times G \longrightarrow G : (a, b) \mapsto a * b$$

satisfăcând condiţiile:

1) $a * (b * c) = (a * b) * c \qquad \forall a, b, c \in G;$

2) există $e \in G$ astfel încât

$$a * e = e * a = a \qquad \forall a \in G;$$

3) oricare ar fi $a \in G$ există $a' \in G$ astfel încât

$$a * a' = a' * a = e.$$

1.2.29 Mulţimea

$$GL(n,\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})\ \ |\ \ \det A \neq 0\ \ \},$$

înzestrată cu înmulţirea, este grup (numit *grupul general liniar* de ordinul n). Submulţimea

$$SL(n,\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})\ \ |\ \ \det A = 1\ \ \}$$

este subgrup al lui $GL(n,\mathbb{K})$ (numit *grupul special liniar* de ordinul n).

1.2.30 Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}).$$

Prin *minor* de ordin k al lui A se înţelege un determinant de forma

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix},$$

unde $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ şi $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq m$.

1.2.31 Definiţie. Spunem că matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ are *rangul* r şi scriem

$$\operatorname{rang} A = r$$

dacă A are un minor de ordinul r nenul şi toţi minorii de ordin mai mare sunt nuli.

1.2.32 Propoziţie. *Matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ are rangul r dacă are un minor de ordinul r nenul şi toţi minorii de ordin $r+1$ sunt nuli.*

Demonstraţie. Conform relaţiei (1.4), orice minor de ordinul $r+2$ (sau mai mare) se poate exprima ca o combinaţie liniară de minori de ordinul $r+1$.

1.2.33 Propoziţie. *Dacă matricele A, B sunt astfel încât AB există, atunci*

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A \qquad \text{şi} \qquad \operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} B.$$

Demonstraţie. Orice minor de ordin r al lui AB este o combinaţie liniară de minori de ordin r ai lui A

$$\begin{vmatrix} (AB)_{i_1j_1} & \cdots & (AB)_{i_1j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (AB)_{i_rj_1} & \cdots & (AB)_{i_rj_r} \end{vmatrix} = \sum_{k_1,\ldots,k_r} B_{k_1j_1}\ldots B_{k_rj_r} \begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \cdots & A_{i_1k_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_rk_1} & \cdots & A_{i_rk_r} \end{vmatrix}$$

şi în acelaşi timp o combinaţie liniară de minori de ordin r ai lui B.

$$\begin{vmatrix} (AB)_{i_1j_1} & \cdots & (AB)_{i_1j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (AB)_{i_rj_1} & \cdots & (AB)_{i_rj_r} \end{vmatrix} = \sum_{k_1,\ldots,k_r} A_{i_1k_1}\ldots A_{i_rk_r} \begin{vmatrix} B_{k_1j_1} & \cdots & B_{k_1j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k_rj_1} & \cdots & B_{k_rj_r} \end{vmatrix}.$$

1.2.34 Dacă elementele matricei

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

sunt funcţii derivabile, atunci utilizând definiţia

$$A'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0},$$

obţinem

$$A'(t_0) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to t_0} \frac{a_{11}(t)-a_{11}(t_0)}{t-t_0} & \lim\limits_{t\to t_0} \frac{a_{12}(t)-a_{12}(t_0)}{t-t_0} \\ \lim\limits_{t\to t_0} \frac{a_{21}(t)-a_{21}(t_0)}{t-t_0} & \lim\limits_{t\to t_0} \frac{a_{22}(t)-a_{22}(t_0)}{t-t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}(t_0) & a'_{12}(t_0) \\ a'_{21}(t_0) & a'_{22}(t_0) \end{pmatrix},$$

adică formula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

În cazul determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)\, a_{22}(t) - a_{12}(t)\, a_{21}(t),$$

formula de derivare se poate scrie sub formele

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{vmatrix},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{vmatrix}.$$

Formulele obţinute se pot generaliza uşor.

1.3 Matrice diagonalizabile

1.3.1 Definiţie. Prin *valoare proprie* a unei matrice pătrate $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ se înţelege orice soluţie a ecuaţiei $\det(A-\lambda I)=0$, adică a ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

1.3.2 Definiţie. Spunem despre o matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ că este *diagonalizabilă* dacă există $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ inversabilă şi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} S. \tag{1.7}$$

1.3.3 Deoarece $I = S^{-1}S$ avem

$$A - \lambda I = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} S,$$

şi prin urmare

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda).$$

Valorile proprii ale matricei diagonalizabile A sunt numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

1.3.4 Din relaţia (1.7) rezultă că, în cazul matricei diagonalizabile A, avem

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \qquad \text{şi} \qquad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

1.3.5 Dacă A este diagonalizabilă, din (1.7) rezultă că

$$A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} S, \qquad \text{oricare ar fi} \qquad k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Dacă $\lambda_1 \, \lambda_2 \, ... \, \lambda_n \neq 0$, atunci A este inversabilă,

$$A^{-1} = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} S$$

şi

$$A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} S, \qquad \text{oricare ar fi} \quad k \in \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}.$$

1.3.6 Dacă matricea (1.7) satisface condiţiile $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, ... , $\lambda_n \geq 0$, atunci

$$M = S^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S$$

are proprietatea $M^2 = A$ şi definim

$$\sqrt{A} = S^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S.$$

În general, matricea M cu proprietatea $M^2 = A$ nu este unică.
De exemplu, dacă $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, atunci

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2.$$

1.3.7 Utilizând relaţia

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

adevărată oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, se poate arăta că

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} S = S^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} S.$$

1.3.8 Definiţie. *Exponenţiala* matricei diagonalizabile

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} S$$

este matricea

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} S.$$

1.3.9 Dacă A este diagonalizabilă,

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} S,$$

şi t este un parametru real, atunci

$$tA = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n t \end{pmatrix} S, \qquad \mathrm{e}^{tA} = S^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S$$
$$= S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} SS^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S = A\,\mathrm{e}^{tA}.$$

1.3.10 Dacă matricea (1.7) satisface condiţiile $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, ... , $\lambda_n > 0$, atunci

$$M = S^{-1}\begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ln\lambda_n \end{pmatrix} S$$

are proprietatea $\mathrm{e}^M = A$ şi definim

$$\ln A = S^{-1}\begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ln\lambda_n \end{pmatrix} S.$$

1.3.11 În general, dacă $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie şi matricea (1.7) satisface condiţia $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in J$, atunci putem defini matricea

$$f(A) = S^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S.$$

1.4 Matrice hermitiene

1.4.1 Definiţie. *Adjuncta* (conjugata transpusei) matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$$

este matricea

$$A^* = {}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1m} & \bar{a}_{2m} & \cdots & \bar{a}_{nm} \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Adjuncta unei matrice cu elemente reale este transpusa

$$A^* = {}^tA, \qquad \text{oricare ar fi} \quad A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

1.4.3 Aplicaţia $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A \mapsto A^*$ este conjugat liniară

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \qquad (\alpha A)^* = \bar{\alpha}\, A^*,$$

şi

$$(AB)^* = B^*\, A^*, \qquad (A^*)^* = A.$$

1.4.4 Definiţie. O *matrice hermitiană* (autoadjunctă) este o matrice pătrată

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

care coincide cu adjuncta ei ($A^* = A$), adică satisface relaţia

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \qquad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Matricea A este numită *antihermitiană* dacă $A^* = -A$.

1.4.5 Orice matrice A este suma dintre o matrice hermitiană şi una antihermitiană,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*).$$

1.4.6 Matricele Pauli (pag. 14-**17**) sunt hermitiene şi pentru orice matrice hermitiană $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ există $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, unic determinate, astfel încât

$$A = \frac{1}{2}\left(a_0 I + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\right).$$

Această relaţie se poate scrie sub forma

$$A = \frac{1}{2}\left(a_0 I + a \cdot \sigma\right)$$

utilizând notaţiile

$$a = (a_1, a_2, a_3) \qquad \text{şi} \qquad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

În particular, avem $\operatorname{tr} A = a_0$.

1.4.7 Orice matrice hermitiană este diagonalizabilă (a se vedea pag. 137-**12**).

1.5 Matrice unitare şi ortogonale

1.5.1 Propoziţie. *Dacă $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, atunci relaţiile*

$$A\,A^* = I, \qquad A^*\,A = I, \qquad A^{-1} = A^*$$

sunt echivalente.

Demonstraţie. Dacă $A\,A^* = I$, atunci A este inversabilă,

$$A\,A^* = I \implies \det A \det A^* = \det I = 1 \implies \det A \neq 0$$

şi înmulţind relaţia $A\,A^* = I$ la stânga cu A^{-1} obţinem $A^{-1} = A^*$. Similar, dacă $A^*\,A = I$, atunci A este inversabilă,

$$A^*\,A = I \implies \det A^* \det A = \det I = 1 \implies \det A \neq 0$$

şi înmulţind relaţia $A\,A^* = I$ la dreapta cu A^{-1} obţinem $A^{-1} = A^*$. Evident, relaţia $A^{-1} = A^*$ implică celelalte două relaţii.

1.5.2 Definiţie. O matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ este numită *matrice unitară* dacă

$$A^*\,A = I$$

(condiţie echivalentă cu $A^{-1} = A^*$ şi cu $A\,A^* = I$).

1.5.3 Dacă A este matrice unitară, atunci $|\det A| = 1$. Într-adevăr,

$$A^*\,A = I \implies \det A \det A^* = 1 \implies |\det A|^2 = 1.$$

1.5.4 Mulţimea

$$U(n) = \{\ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})\ \ |\ \ \ A^*\, A = I\ \},$$

înzestrată cu înmulţirea, este grup (numit *grupul unitar* de ordinul n). Submulţimea

$$SU(n) = \{\ A \in U(n)\ \ |\ \ \det A = 1\ \ \}$$

este subgrup al lui $U(n)$ (numit *grupul special unitar* de ordinul n).

1.5.5 Orice matrice unitară este diagonalizabilă (a se vedea pag. 154-**9**).

1.5.6 Propoziţie. *Dacă $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, atunci relaţiile*

$$A\,{}^tA = I, \qquad {}^tA\,A = I, \qquad A^{-1} = {}^tA$$

sunt echivalente.

1.5.7 Definiţie. O matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este numită *matrice ortogonală* dacă

$${}^tA\,A = I$$

(condiţie echivalentă cu $A^{-1} = {}^tA$ şi cu $A\,{}^tA = I$).

1.5.8 Dacă A este matrice ortogonală, atunci $\det A \in \{-1, 1\}$.

1.5.9 Mulţimea

$$O(n) = \{\ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\ \ |\ \ \ {}^tA\,A = I\ \},$$

înzestrată cu înmulţirea, este grup (numit *grupul ortogonal* de ordinul n). Submulţimea

$$SO(n) = \{\ A \in O(n)\ \ |\ \ \det A = 1\ \ \}$$

este subgrup al lui $O(n)$ (numit *grupul special ortogonal* de ordinul n).

1.6 Produs tensorial de matrice

1.6.1 Definiţie (caz particular). *Suma directă* a matricelor

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

este matricea bloc-diagonală

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 0 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^1 & b_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

Definiţia se poate uşor extinde la matrice arbitrare.

1.6.2 Definiţie (caz particular). *Produsul tensorial* al matricelor

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

este bloc-matricea

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & a_2^1 B & a_3^1 B \\ a_1^2 B & a_2^2 B & a_3^2 B \\ a_1^3 B & a_2^3 B & a_3^3 B \end{pmatrix},$$

adică

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^1 b_2^1 & a_2^1 b_1^1 & a_2^1 b_2^1 & a_3^1 b_1^1 & a_3^1 b_2^1 \\ a_1^1 b_1^2 & a_1^1 b_2^2 & a_2^1 b_1^2 & a_2^1 b_2^2 & a_3^1 b_1^2 & a_3^1 b_2^2 \\ a_1^2 b_1^1 & a_1^2 b_2^1 & a_2^2 b_1^1 & a_2^2 b_2^1 & a_3^2 b_1^1 & a_3^2 b_2^1 \\ a_1^2 b_1^2 & a_1^2 b_2^2 & a_2^2 b_1^2 & a_2^2 b_2^2 & a_3^2 b_1^2 & a_3^2 b_2^2 \\ a_1^3 b_1^1 & a_1^3 b_2^1 & a_2^3 b_1^1 & a_2^3 b_2^1 & a_3^3 b_1^1 & a_3^3 b_2^1 \\ a_1^3 b_1^2 & a_1^3 b_2^2 & a_2^3 b_1^2 & a_2^3 b_2^2 & a_3^3 b_1^2 & a_3^3 b_2^2 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Definiţia se poate uşor extinde la matrice arbitrare.

Produsul tensorial mai este numit *produs direct* sau *produs Kronecker*.

1.6.3 Exemple. Avem

$$I \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6.4 Se arată uşor ca produsul tensorial are următoarele proprietăţi

$$(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B);$$
$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C;$$
$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C;$$
$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C;$$
$${}^t(A \otimes B) = {}^tA \otimes {}^tB.$$

1.6.5 Exerciţiu. Arătaţi că

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B).$$

1.6.6 Teoremă . *Dacă* $A, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *şi* $B, D \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$, *atunci*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

Demonstraţie. A se vedea pag. 94-**20**

1.6.7 Dacă $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ şi $B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$, atunci

$$A \otimes B = (A \otimes I_m)(I_n \otimes B) \qquad \det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n.$$

Dacă matricele A, B sunt inversabile, atunci $A \otimes B$ este inversabilă şi

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

1.6.8 Teoremă.

Dacă matricele A, B sunt hermitiene, atunci $A \otimes B$ *este hermitiană.*
Dacă matricele A, B sunt unitare, atunci $A \otimes B$ *este unitară.*

Demonstraţie. Avem

$$(A\otimes B)^*=A^*\otimes B^* \qquad \text{şi} \qquad (A\otimes B)(A\otimes B)^*=(AA^*)\otimes(BB^*).$$

1.6.9 Exerciţiu. Fie $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ şi $C=A\otimes I_m+I_n\otimes B$. Arătaţi că

$$[A\otimes I_m, I_n\otimes B]=0, \qquad \mathrm{e}^C=\mathrm{e}^A\otimes\mathrm{e}^B.$$

1.6.10 Teoremă. *Dacă a este valoare proprie a matricei $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ şi b este valoare proprie a matricei $B\in\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$, atunci:*
ab este valoare proprie a matricei $A\otimes B$;
$a+b$ este valoare proprie a matricei $A\otimes I+I\otimes B$.

Demonstraţie. A se vedea pag. 188-**6**.

1.6.11 În cazul produsului tensorial este avantajoasă folosirea perechilor de indici pentru indexarea liniilor şi coloanelor. Utilizând prescurtarea $ij\equiv(i,j)$ şi ordonarea lexicografică, avem

$$\{1,2,3\}\times\{1,2\}=\{11,12,21,22,31,32\}.$$

Produsul tensorial (1.8) poate fi privit ca fiind aplicaţia

$$A\otimes B:\{11,12,21,22,31,32\}\times\{11,12,21,22,31,32\}\longrightarrow\mathbb{K}, \quad (A\otimes B)^{ij}_{k\ell}=A^i_k\,B^j_\ell,$$

şi avem

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}
\alpha^{11}_{11} & \alpha^{11}_{12} & \alpha^{11}_{21} & \alpha^{11}_{22} & \alpha^{11}_{31} & \alpha^{11}_{32}\\
\alpha^{12}_{11} & \alpha^{12}_{12} & \alpha^{12}_{21} & \alpha^{12}_{22} & \alpha^{12}_{31} & \alpha^{12}_{32}\\
\alpha^{21}_{11} & \alpha^{21}_{12} & \alpha^{21}_{21} & \alpha^{21}_{22} & \alpha^{21}_{31} & \alpha^{21}_{32}\\
\alpha^{22}_{11} & \alpha^{22}_{12} & \alpha^{22}_{21} & \alpha^{22}_{22} & \alpha^{22}_{31} & \alpha^{22}_{32}\\
\alpha^{31}_{11} & \alpha^{31}_{12} & \alpha^{31}_{21} & \alpha^{31}_{22} & \alpha^{31}_{31} & \alpha^{31}_{32}\\
\alpha^{32}_{11} & \alpha^{32}_{12} & \alpha^{32}_{21} & \alpha^{32}_{22} & \alpha^{32}_{31} & \alpha^{32}_{32}
\end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad \alpha^{ij}_{k\ell}=a^i_k\,b^j_\ell.$$

1.6.12 Definiţie. Pentru o matrice descrisă utilizând perechi de indici

$$T=\left(T^{ij}_{k\ell}\right)_{1\le i,k\le n,\,1\le j,\ell\le m}$$

se pot defini două *urme parţiale* şi anume,

$$\operatorname{tr}_1 T = \left(\sum_{i=1}^{n} T_{i\ell}^{ij} \right)_{1\le j,\ell\le m},$$

$$\operatorname{tr}_2 T = \left(\sum_{j=1}^{m} T_{kj}^{ij} \right)_{1\le i,k\le n}.$$

1.6.13 În cazul produsului tensorial (1.8) avem

$$\operatorname{tr}_1 (A\otimes B) = \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i\ell}^{ij} \right)_{1\le j,\ell\le 2} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i^i\, b_\ell^j \right)_{1\le j,\ell\le 2} = (\operatorname{tr} A)B,$$

$$\operatorname{tr}_2 (A\otimes B) = \left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_{kj}^{ij} \right)_{1\le i,k\le 3} = \left(\sum_{j=1}^{2} a_k^i\, b_j^j \right)_{1\le i,k\le 3} = (\operatorname{tr} B)A.$$

Relaţiile obţinute,

$$\operatorname{tr}_1 (A\otimes B) = (\operatorname{tr} A)B, \qquad \operatorname{tr}_2 (A\otimes B) = (\operatorname{tr} B)A$$

au loc oricare ar fi matricele A şi B.

1.6.14 Matricea $\operatorname{tr}_1 T$ este o sumă de blocuri diagonale

$$\operatorname{tr}_1 \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} & T_{21}^{11} & T_{22}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} & T_{21}^{12} & T_{22}^{12} \\ T_{11}^{21} & T_{12}^{21} & T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{11}^{22} & T_{12}^{22} & T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix},$$

iar $\operatorname{tr}_2 T$ are ca elemente urmele tuturor blocurilor

$$\operatorname{tr}_2 \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} & T_{21}^{11} & T_{22}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} & T_{21}^{12} & T_{22}^{12} \\ T_{11}^{21} & T_{12}^{21} & T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{11}^{22} & T_{12}^{22} & T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} \end{pmatrix} & \operatorname{tr} \begin{pmatrix} T_{21}^{11} & T_{22}^{11} \\ T_{21}^{12} & T_{22}^{12} \end{pmatrix} \\ \operatorname{tr} \begin{pmatrix} T_{11}^{21} & T_{12}^{21} \\ T_{11}^{22} & T_{12}^{22} \end{pmatrix} & \operatorname{tr} \begin{pmatrix} T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

1.6.15 Propoziţie. *Oricare ar fi matricele A, B, avem*

$$(\operatorname{tr}_2 (A\otimes B)) \otimes (\operatorname{tr}_1 (A\otimes B)) = (\operatorname{tr} (A\otimes B))\ A\otimes B.$$

Demonstraţie. Consecinţă directă a relaţiilor

$$\mathrm{tr}_1\,(A\otimes B)=(\mathrm{tr}\,A)B,\qquad \mathrm{tr}_2\,(A\otimes B)=(\mathrm{tr}\,B)A,\qquad \mathrm{tr}\,(A\otimes B)=(\mathrm{tr}\,A)(\mathrm{tr}\,B).$$

1.6.16 Matricea

$$T=\begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} & T_{21}^{11} & T_{22}^{11}\\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} & T_{21}^{12} & T_{22}^{12}\\ T_{11}^{21} & T_{12}^{21} & T_{21}^{21} & T_{22}^{21}\\ T_{11}^{22} & T_{12}^{22} & T_{21}^{22} & T_{22}^{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

nu este produsul tensorial a două matrice $A,B\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ deoarece

$$(\mathrm{tr}_2\,T)\otimes(\mathrm{tr}_1\,T)\neq(\mathrm{tr}\,T)\;T.$$

1.6.17 Teoremă. *Dacă T este o matrice descrisă cu perechi de indici*

$$T=\left(T_{k\ell}^{ij}\right)_{1\le i,k\le n,\,1\le j,\ell\le m},$$

atunci

$$\mathrm{tr}\,((A\otimes I_m)T)=\mathrm{tr}\,(A\,\mathrm{tr}_2T),\quad \text{oricare ar fi}\quad A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}),$$

$$\mathrm{tr}\,((I_n\otimes B)T)=\mathrm{tr}\,(B\,\mathrm{tr}_1T),\quad \text{oricare ar fi}\quad B\in\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C}).$$

Demonstraţie. Avem

$$\mathrm{tr}\,((A\otimes I_m)T)=\sum_{i,j}\sum_{k,\ell}(A\otimes I_m)_{k\ell}^{ij}\,T_{ij}^{k\ell}=\sum_{i,j}\sum_{k,\ell}A_k^i\,\delta_\ell^j\,T_{ij}^{k\ell}=\sum_{i,k}A_k^i\,(\mathrm{tr}_2T)_i^k=\mathrm{tr}\,(A\,\mathrm{tr}_2T),$$

$$\mathrm{tr}\,((I_n\otimes B)T)=\sum_{i,j}\sum_{k,\ell}(I_n\otimes B)_{k\ell}^{ij}\,T_{ij}^{k\ell}=\sum_{i,j}\sum_{k,\ell}\delta_k^i\,B_\ell^j\,T_{ij}^{k\ell}=\sum_{j,\ell}B_\ell^j\,(\mathrm{tr}_1T)_j^\ell=\mathrm{tr}\,(B\,\mathrm{tr}_1T).$$

1.6.18 Definiţie. În cazul oricărei matrice descrise folosind perechi de indici

$$T=\left(T_{k\ell}^{ij}\right)_{1\le i,k\le n,\,1\le j,\ell\le m}$$

se pot defini două *transpuse parţiale* şi anume

$${}^{t_1}T=\left({}^{t_1}T_{k\ell}^{ij}\right)_{1\le i,k\le n,\,1\le j,\ell\le m},\qquad \text{unde}\quad {}^{t_1}T_{k\ell}^{ij}=T_{i\ell}^{kj},$$

$${}^{t_2}T=\left({}^{t_2}T_{k\ell}^{ij}\right)_{1\le i,k\le n,\,1\le j,\ell\le m},\qquad \text{unde}\quad {}^{t_2}T_{k\ell}^{ij}=T_{kj}^{i\ell}.$$

Capitolul 2

Spaţii vectoriale finit-dimensionale

2.1 Spaţii vectoriale

2.1.1 Definiţie. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Un *spaţiu vectorial* peste $\mathbb{K}$ este o mulţime $\mathcal{V}$ considerată împreună cu două operaţii

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} : \ (x, y) \mapsto x+y \qquad \text{(adunarea)},$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} : \ (\alpha, x) \mapsto \alpha x \qquad \text{(înmulţirea cu scalari)}$$

satisfăcând următoarele axiome:

1. $(x + y) + z = x + (y + z), \qquad \forall x, y, z \in \mathcal{V}$;
2. există un element $0 \in \mathcal{V}$ astfel încât $\ 0 + x = x + 0 = x, \qquad \forall x \in \mathcal{V}$;
3. oricare ar fi $x \in \mathcal{V}$ există $-x \in \mathcal{V}$ astfel încât $\ x + (-x) = (-x) + x = 0$;
4. $x + y = y + x, \qquad \forall x, y \in \mathcal{V}$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \ \forall x, y \in \mathcal{V}$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \ \forall x \in \mathcal{V}$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \ \forall x \in \mathcal{V}$;
8. $1x = x, \qquad \forall x \in \mathcal{V}$.

2.1.2 Elementele spaţiului $\mathcal{V}$ sunt numite *vectori*, iar cele ale lui $\mathbb{K}$ *scalari*. Un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ este numit *spaţiu vectorial real*, iar unul peste $\mathbb{C}$ *spaţiu vectorial complex*. În loc de $x+(-y)$ scriem $x-y$.

2.1.3 Propoziţie. *Dacă $\mathcal{V}$ este spaţiu vectorial, atunci:*

$a)$ $\alpha x = 0 \iff \alpha = 0$ or $x = 0$;
$b)$ $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$;
$c)$ $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$;
$d)$ $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

Demonstraţie. a) Avem

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x \implies 0x = 0,$$
$$\alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0 \implies \alpha 0 = 0,$$
$$\left.\begin{array}{l} \alpha x = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{array}\right\} \implies x = \frac{1}{\alpha}\, 0 = 0.$$

b) $0 = \alpha 0 = \alpha(x + (-x)) = \alpha x + \alpha(-x) \implies \alpha(-x) = -\alpha x,$
$0 = 0x = (\alpha + (-\alpha))x = \alpha x + (-\alpha)x \implies (-\alpha)x = -\alpha x.$

c) $\alpha(x - y) = \alpha(x + (-y)) = \alpha x + \alpha(-y) = \alpha x - \alpha y.$

d) $(\alpha - \beta)x = (\alpha + (-\beta))x = \alpha x + (-\beta)x = \alpha x - \beta x.$

2.1.4 Exemplu. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, unde

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$
$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

este un spaţiu vectorial real.

2.1.5 Exemplu. Mulţimea de matrice

$$\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \right) \;\middle|\; x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

are o structură de spaţiu vectorial real definită prin

$$\left(\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & x_{13}+y_{13} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} & x_{23}+y_{23} \end{array} \right),$$
$$\alpha \left(\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} & \alpha x_{13} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} & \alpha x_{23} \end{array} \right).$$

2.1.6 Exemplu. Mulţimea $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ a tuturor funcţiilor $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ are o structură de spaţiu vectorial complex definită de

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$
$$(\alpha\, \varphi)(x) = \alpha\, \varphi(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

2.1.7 Exemplu. $\mathbb{R}$ este spaţiu vectorial real în raport cu adunarea şi înmulţirea.

2.1.8 Exemplu. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, unde

$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\mathrm{i},$$
$$\alpha(x + y\mathrm{i}) = \alpha x + \alpha y\mathrm{i}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

este un spaţiu vectorial real.

2.1.9 Exemplu. $\mathbb{C}$ are o structura de spaţiu vectorial complex în raport cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe.

2.1.10 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Prin *subspaţiu vectorial* al lui $\mathcal{V}$ se înţelege o submulţime $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ satisfăcând condiţia

$$\left.\begin{array}{c} x, y \in \mathcal{W} \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \implies \alpha x + \beta y \in \mathcal{W}. \tag{2.1}$$

2.1.11 Propoziţie. *Submulţimea $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

$$a) \quad \left.\begin{array}{c} x \in \mathcal{W} \\ y \in \mathcal{W} \end{array}\right\} \implies x + y \in \mathcal{W}, \tag{2.2}$$

$$b) \quad \left.\begin{array}{c} x \in \mathcal{W} \\ \alpha \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \implies \alpha x \in \mathcal{W}. \tag{2.3}$$

Demonstraţie. (2.1) $\Rightarrow$ (2.2): Alegem $\alpha = \beta = 1$.
(2.1) $\Rightarrow$ (2.3): Alegem $\beta = 0$.
(2.2) & (2.3) $\Rightarrow$ (2.1):

$$\left.\begin{array}{c} x, y \in \mathcal{W} \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \overset{(2.3)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{c} \alpha x \in \mathcal{W} \\ \beta y \in \mathcal{W} \end{array}\right\} \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} \alpha x + \beta y \in \mathcal{W}.$$

2.1.12 Orice subspaţiu vectorial $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ are o structura de spaţiu vectorial, operaţiile fiind cele induse din $\mathcal{V}$.

2.1.13 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathcal{W} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

este un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Fie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{W}$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{W}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem

$$\left.\begin{array}{r} x \in \mathcal{W} \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y \in \mathcal{W} \implies y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{array}\right\} \implies \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 = 0,$$

ceea ce arată că $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \in \mathcal{W}$.

2.1.14 Exemplu. Mulţimea

$$\mathcal{W} = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

este un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

2.1.15 Exemplu. Mulţimea soluţiilor unui sistem liniar omogen

$$\mathcal{W} = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{kn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

este un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$.

2.1.16 Exemplu. $\mathbb{R} \equiv \{x = x + 0\mathrm{i} \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathbb{C}$ considerat ca spaţiu vectorial real.

2.1.17 Exemplu. $\mathcal{W} = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă} \}$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{V} = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \}$.

2.1.18 Exemplu. Mulţimea matricelor simetrice

$$\mathcal{W} = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A \right\}$$

este un subspaţiu vectorial al spaţiului

$$\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

al tuturor matricelor cu trei linii şi trei coloane.

2.1.19 Propoziţie.

Dacă $\mathcal{V}$ este spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$ şi $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset \mathcal{V}$, atunci

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\ \}$$

este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$, numit subspaţiul generat *de $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.*

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) + \mu(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n)\\ = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)v_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)v_2 + ... + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)v_n.\end{aligned}$$

2.1.20 Definiţie. Spunem că $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este un *sistem de generatori* pentru $\mathcal{V}$ sau că $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ generează spaţiul $\mathcal{V}$ dacă

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\} = \mathcal{V}.$$

2.1.21 Dacă $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathcal{V}$, atunci orice vector $x \in \mathcal{V}$ se poate scrie sub forma

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

2.1.22 Exerciţiu. Să se arate că vectorii $v_1 = (1, 1)$ şi $v_2 = (1, -1)$ formează un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare. Avem de arătat că $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$, adică

$$\mathbb{R}^2 = \{\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1) \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Evident, $\{\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1) \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Rămâne de arătat incluziunea inversă. Fie $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Arătăm că există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,$$

adică $(x_1, x_2) = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1)$, ceea ce este echivalent cu

$$(x_1, x_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2).$$

Această relaţie se mai poate scrie

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = x_2 \end{cases}$$

şi conduce la

$$\alpha_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

2.1.23 Exerciţiu. Să se arate că în $\mathbb{R}^3$ avem

$$\text{span}\{(1,2,3),(-1,1,0)\} = \text{span}\{(1,2,3),(-1,1,0),(0,3,3)\}.$$

Indicaţie. Avem $(0,3,3) = (1,2,3) + (-1,1,0)$.

2.1.24 Propoziţie. *Dacă $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este un sistem de generatori pentru V astfel încât există $k \in \{1,2,...,n\}$ cu*

$$v_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i \, v_i,$$

atunci $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \backslash \{v_k\}$ este sistem de generatori pentru V.

Demonstraţie. Orice vector $x \in V$ este o combinaţie liniară de v_1, v_2, ..., v_n. Dar

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \implies x = \sum_{i \neq k} \alpha_i \, v_i + \alpha_k \sum_{i \neq k} \lambda_i \, v_i = \sum_{i \neq k} (\alpha_i + \alpha_k \lambda_i) v_i.$$

2.1.25 Definiţie. Spunem că spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ este *finit generat* dacă admite un sistem de generatori finit.

2.1.26 *Convenţie.* Dacă nu se menţionează contrariul, spaţiile vectoriale considerate în continuare vor fi presupuse finit generate.

2.1.27 Propoziţie. *Următoarele două afirmaţii sunt echivalente:*

a) Niciunul dintre vectorii v_1, v_2, ..., v_n nu se poate scrie ca o combinaţie liniară de ceilalţi;

b) relaţia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ este posibilă numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, adică

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Demonstraţie. a)⇒b) Presupunând, de exemplu, că relaţia $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ are loc pentru $\alpha_n \neq 0$ obţinem

$$v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1}.$$

b)⇒a) Dacă, de exemplu, avem $v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1}$, atunci

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0,$$

adică $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ nu este singurul caz în care $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$.

2.1.28 Definiţie. Sistemul de vectori $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este *liniar independent* dacă

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

2.1.29 În cazul unui sistem de vectori liniar independenţi niciunul dintre vectori nu se poate scrie ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori.

2.1.30 Exerciţiu. Să se arate că vectorii $v_1 = (1, 2)$ şi $v_2 = (-1, 3)$ din $\mathbb{R}^2$ sunt liniar independenţi.

Rezolvare. Fie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, adică

$$\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(-1, 3) = (0, 0)$$
$$(\alpha_1, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, 3\alpha_2) = (0, 0)$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) = (0, 0).$$

Ultima relaţie este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

care conduce la $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2.1.31 Exerciţiu. Un sistem de vectori liniar independenţi nu poate conţine vectorul nul.

Rezolvare. Dacă $v_n = 0$, atunci $0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_{n-1} + 1v_n = 0$.

2.1.32 Orice subsistem al unui sistem de vectori liniar independenţi este un sistem de vectori liniar independenţi.

2.1.33 Propoziţie. *Dacă $\{v_1, ..., v_n\}$ este un sistem de vectori astfel încât niciunul dintre ei nu este combinaţie liniară de cei scrişi în faţa lui, atunci $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este un sistem de vectori liniar independenţi.*

Demonstraţie. Fie

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0. \tag{2.4}$$

Trebuie ca $\alpha_n = 0$ deoarece în caz contrar

$$v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1},$$

adică v_n este combinaţie liniară de vectorii scrişi în faţa lui. Având în vedere că $0v_n = 0$, relaţia (2.4) se mai scrie

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} = 0.$$

La fel ca mai sus se arată că $\alpha_{n-1} = 0$, apoi $\alpha_{n-2} = 0$, ... , $\alpha_1 = 0$.

2.1.34 Din orice sistem de generatori ai unui spaţiu vectorial V se poate obţine un sistem de generatori liniar independenţi eliminând succesiv vectorii care se pot scrie ca o combinaţie liniară de vectorii aflaţi înaintea lor. Mai exact, plecăm de la sistemul de generatori $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ şi aplicăm următoarele operaţii sistemului rezultat în etapa anterioară:

a) eliminăm primul vector dacă acesta este nul;

b) eliminăm al doilea vector dacă acesta se obţine din primul prin înmulţirea cu un scalar;

c) eliminăm al treilea vector dacă acesta este combinaţie liniară de primii doi;

d) eliminăm al patrulea vector dacă acesta este combinaţie liniară de vectorii precedenţi, etc.

2.1.35 Exerciţiu. Să se obţină un sistem liniar independent plecând de la sistemul de vectori $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subset \mathbb{R}^4$, unde $v_1 = (0,0,0,0)$, $v_2 = (1,0,-1,1)$, $v_3 = (2,0,-2,2)$, $v_4 = (1,1,1,1)$, $v_5 = (2,1,0,2)$.

Răspuns. $\{v_2, v_4\}$.

2.1.36 Definiţie. Prin *bază* a unui spaţiu vectorial se înţelege un sistem de generatori format din vectori liniar independenţi.

2.1.37 Pentru a arăta că $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este bază în $\mathcal{V}$ avem de arătat că:

a) $\mathcal{V} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$;

b) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$

2.1.38 Propoziţie. *Dacă* $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *este bază în* $\mathcal{V}$*, atunci orice vector* $x \in \mathcal{V}$ *se poate scrie în mod unic sub forma*

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

(numerele α_1, α_2, ... , α_n se numesc *coordonatele* lui x în baza $\mathfrak{B}$).

Demonstraţie. Deoarece $\mathfrak{B}$ generează spaţiul $\mathcal{V}$ există α_1, α_2, ..., α_n în $\mathbb{K}$ astfel încât

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Relaţia

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n,$$

echivalentă cu

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0,$$

conduce la $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$,... , $\alpha_n - \beta_n = 0$, adică $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$,... , $\alpha_n = \beta_n$.

2.1.39 Exerciţiu. Să se arate că $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ este bază în $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare. $\mathcal{B}$ este sistem de generatori: oricare ar fi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avem

$$(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

$\mathcal{B}$ este sistem de vectori liniar independenţi:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0).$$

2.1.40 Propoziţie. *Dacă $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial,*

$$M = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

este un sistem de vectori liniar independenţi şi

$$S = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$$

este un sistem de generatori ai lui $\mathcal{V}$, atunci:

a) $n \leq k$;

b) sistemul de vectori M se poate completa până la o bază a lui $\mathcal{V}$ adăugând vectori din S.

Demonstraţie. a) Vectorul v_n este nenul deoarece sistemul de vectori liniar independenţi M nu poate conţine vectorul nul. Acest vector este o combinaţie liniară de w_1, w_2, ..., w_k. Deoarece cel puţin unul dintre coeficienţii acestei combinaţii liniare este nenul, din sistemul de generatori $\{v_n, w_1, w_2, ..., w_k\}$ se poate elimina un vector astfel încât el să rămână în continuare sistem de generatori. Vom elimina primul vector care este

combinaţie liniară de cei aflaţi înaintea lui. Vectorul eliminat este unul dintre vectorii w_1, w_2, ..., w_k şi-l notăm cu w_{i_1}. Considerăm în continuare sistemul de vectori liniar independenţi

$$M_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$$

sistemul de generatori

$$S_1 = \{v_n, w_1, w_2, ..., w_k\} \backslash \{w_{i_1}\}$$

şi facem aceleaşi operaţii, adică luăm v_{n-1} din M_1, îl adăugăm la S_1 şi eliminăm primul vector w_{i_2} care este combinaţie liniară de cei aflaţi în faţa lui. Rezultă astfel sistemul de vectori liniar independenţi

$$M_2 = \{v_1, v_2, ..., v_{n-2}\}$$

şi sistemul de generatori

$$S_2 = \{v_{n-1}, v_n, w_1, w_2, ..., w_k\} \backslash \{w_{i_1}, w_{i_2}\}.$$

Procesul poate fi continuat până introducem toţi vectorii sistemului de vectori liniar independenţi M în sistemul de generatori, ceea ce arată că $n \leq k$.
b) După introducerea tuturor vectorilor din M în sistemul de generatori se obţine un sistem de generatori

$$S_n = \{v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_k\} \backslash \{w_{i_1}, w_{i_2}, ..., w_{i_n}\}.$$

Eliminând vectorii care sunt combinaţii liniare de cei aflaţi în faţa lor rezultă o bază care conţine vectorii din M.

2.1.41 Teoremă. *Oricare două baze ale unui spaţiu vectorial $\mathcal{V}$ conţin acelaşi număr de vectori.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_k\}$ două baze ale lui $\mathcal{V}$. Fiecare dintre ele este atât sistem de vectori liniar independenţi cât şi sistem de generatori pentru $\mathcal{V}$. Conform propoziţiei precedente trebuie sa avem simultan $n \leq k$ şi $k \leq n$.

2.1.42 Definiţie. Spunem că spaţiul vectorial V are dimensiune n şi scriem

$$\dim \mathcal{V} = n$$

dacă $\mathcal{V}$ admite o bază formată din n vectori.

2.1.43 *Notaţie.* Pentru a indica corpul peste care este considerat $\mathcal{V}$ scriem $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V}$.

2.1.44 Exerciţiu. Să se arate că:

a) $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = 2$
b) $\dim_{\mathbb{R}}\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\ \} = 2$
c) $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$
d) $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$.

Rezolvare. a) $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ este bază a lui $\mathbb{R}^2$.
b) Din

$$\begin{aligned}\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\ \} &= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,-1) \mid x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

rezultă că $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ este sistem de generatori. Deoarece relaţia

$$x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,-1) = (0,0,0)$$

conduce la $x_1 = x_2 = 0$, sistemul de generatori $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ este un sistem de vectori liniar independenţi şi deci o bază.
c) $\mathbb{C} = \{x + y\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{R}\ \}$ considerat ca spaţiu vectorial real admite baza $\{1, \mathrm{i}\}$.
d) O bază a lui $\mathbb{C}$ peste $\mathbb{C}$ este $\mathcal{B} = \{1\}$.

2.1.45 MATHEMATICA: Dimensiunea subspaţiului generat de o mulţime

```
In[1]:=MatrixRank[{{1,0,0}, {0,1,1}, {1,1,1}}]  ↦  Out[1]=2
```

2.1.46 Propoziţie. *a) Dacă $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este subspaţiu vectorial, atunci* $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$.
b) Dacă $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este subspaţiu şi $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$, *atunci* $\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Demonstraţie. a) Fie $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bază în $\mathcal{V}$ şi $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ bază în $\mathcal{W}$. Deoarece $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ este sistem liniar independent în $\mathcal{V}$ şi $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sistem de generatori în $\mathcal{V}$ rezultă că $k \leq n$ (vezi pag. 47-**40**).
b) Orice bază a lui $\mathcal{W}$ este sistem liniar independent în $\mathcal{V}$ şi deci poate fi prelungită până la o bază a lui $\mathcal{V}$. Deoarece $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$ rezultă că orice bază a lui $\mathcal{W}$ este deja bază pentru $\mathcal{V}$.

2.1.47 Teoremă (Kronecker). *Dacă*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

şi

$$A_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad ... \quad a_{im}), \qquad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

atunci

$$\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{span}\{A_1, A_2, ..., A_n\} = \dim \operatorname{span}\{A^1, A^2, ..., A^m\}.$$

Demonstraţie. Fie $r = \operatorname{rang} A$. Deoarece rangul lui A nu se schimbă prin permutarea liniilor (sau coloanelor) putem presupune că

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Arătăm că $\{A^1, A^2, ..., A^r\}$ este sistem liniar independent şi că matricele A^{r+1},...,A^m din $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ sunt combinaţii liniare de A^1, A^2, ... , A^r. Din relaţia

$$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_r A^r = 0$$

rezultă că

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1r}\alpha_r = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2r}\alpha_r = 0 \\ ..... \\ a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \cdots + a_{rr}\alpha_r = 0 \end{cases}$$

Acesta este un sistem Cramer cu soluţia $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$ şi $j \in \{1, 2, ..., m\}$, avem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând acest determinant după ultima linie, obţinem relaţia

$$(-1)^{r+2}a_{i1}\lambda_1 + (-1)^{r+3}a_{i2}\lambda_2 + \cdots + (-1)^{2r+1}a_{ir}\lambda_r + (-1)^{2r+2}a_{ij}\,d = 0,$$

unde

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad \lambda_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r-1} & a_{1j} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r-1} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr-1} & a_{rj} \end{vmatrix}$$

nu depind de i. Rezultă

$$a_{ij} = -(-1)^r \frac{\lambda_1}{d}\, a_{i1} - (-1)^{r-1}\frac{\lambda_2}{d}\, a_{i2} - \cdots - (-1)^1 \frac{\lambda_r}{d}\, a_{ir},$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, adică

$$A^j = -(-1)^r \frac{\lambda_1}{d}\, A^1 - (-1)^{r-1}\frac{\lambda_2}{d}\, A^2 - \cdots - (-1)^1 \frac{\lambda_r}{d}\, A^r.$$

Am arătat astfel că $\dim\langle A^1, A^2, ..., A^m\rangle = \operatorname{rang} A$. Deoarece $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$ deducem că $\dim\langle A_1, A_2, ..., A_n\rangle = \operatorname{rang} A$.

2.1.48 Exerciţiu Să se arate că vectorii

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13}), \qquad v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23}), \qquad v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})$$

din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2.1.49 Teoremă. *Sistemul de ecuaţii liniare*

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1m}\,x_m = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2m}\,x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nm}\,x_m = b_n \end{cases}$$

admite soluţie dacă şi numai dacă

$$\text{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

(rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse).

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din teorema anterioară ţinând seama de faptul că sistemul considerat se mai poate scrie

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

2.1.50 Fie

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1m}\,x_m = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2m}\,x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nm}\,x_m = b_n \end{cases}$$

un sistem de ecuaţii liniare compatibil (adică care admite soluţie) şi fie r rangul matricei sistemului. Schimbând eventual ordinea ecuaţiilor şi indexarea necunoscutelor, putem presupune că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

În cazul în care $r < n$ este suficient să luăm în considerare doar primele r ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1m}\,x_m = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2m}\,x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\,x_1 + a_{r2}\,x_2 + \cdots + a_{rm}\,x_m = b_r \end{cases} \tag{2.5}$$

(numite *ecuaţii principale*) deoarece restul de ecuaţii vor fi combinaţii liniare de

acestea. Sistemul de ecuaţii (2.5) poate fi privit ca un sistem Cramer

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1r}\,x_r = b_1 - a_{1r+1}\,x_{r+1} - \cdots - a_{1m}\,x_m \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2r}\,x_r = b_2 - a_{2r+1}\,x_{r+1} - \cdots - a_{2m}\,x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\,x_1 + a_{r2}\,x_2 + \cdots + a_{rr}\,x_r = b_r - a_{rr+1}\,x_{r+1} - \cdots - a_{rm}\,x_m \end{cases}$$

cu necunoscutele x_1, x_2, ..., x_r (numite *necunoscute principale*) considerând x_{r+1}, ... , x_m ca parametri care pot lua valori arbitrare. În cazul în care $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ (sistem omogen), spaţiul soluţiilor sistemului este un spaţiu vectorial de dimensiune $m - r$.

2.1.51 *Convenţia de sumare a lui Einstein.* Utilizarea de indici superiori pentru indexarea coordonatelor vectorilor permite scrierea unor expresii matematice sub o formă mai simplă. Reprezentarea

$$x = x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n$$

a unui vector $x \in \mathcal{V}$ în raport cu o bază $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ se poate scrie utilizând convenţia de sumare a lui Einstein (un indice care apare într-un produs atât ca indice inferior cât şi ca indice superior este indice de sumare) sub forma

$$x = x^i v_i$$

2.1.52 Definiţie. Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ două baze şi

$$\begin{aligned} v'_1 &= \alpha_1^1 v_1 + \alpha_1^2 v_2 + \cdots + \alpha_1^n v_n \\ v'_2 &= \alpha_2^1 v_1 + \alpha_2^2 v_2 + \cdots + \alpha_2^n v_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v'_n &= \alpha_n^1 v_1 + \alpha_n^2 v_2 + \cdots + \alpha_n^n v_n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Matricea

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

este numită *matricea de trecere* de la baza $\mathfrak{B}$ la $\mathfrak{B}'$.

2.1.53 Utilizând convenţia de sumare, relaţiile (2.6) se pot scrie sub forma

$$v'_i = \alpha_i^j v_j\,.$$

2.1.54 Propoziţie. *Matricea S este inversabilă şi inversa ei*

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la baza $\mathfrak{B}'$ la $\mathfrak{B}$.

Demonstraţie. Fie $v_j = \beta_j^k\, v'_k$. Din relaţiile

$$v_j = \beta_j^k\, v'_k = \beta_j^k\, \alpha_k^i\, v_i, \qquad v'_i = \alpha_i^j\, v_j = \alpha_i^j\, \beta_j^k\, v'_k$$

rezultă egalităţile

$$\beta_j^k \alpha_k^i = \delta_j^i, \qquad \alpha_i^j \beta_j^k = \delta_i^k, \tag{2.7}$$

unde

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad i = j \\ 0 & \text{dacă} \quad i \neq j. \end{cases}$$

2.1.55 Teoremă.

$$\left.\begin{array}{l} v'_i = \alpha_i^j\, v_j \\ x = x^j\, v_j = x'^i\, v'_i \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^j = \alpha_i^j\, x'^i \\ x'^i = \beta_j^i\, x^j \end{array}\right.$$

Demonstraţie. Din

$$x^j\, v_j = x'^i\, v'_i = x'^i\, \alpha_i^j\, v_j$$

rezultă relaţia

$$x^j = \alpha_i^j\, x'^i$$

care conduce la

$$\beta_j^k\, x^j = \beta_j^k\, \alpha_i^j\, x'^i = \delta_i^k\, x'^i = x'^k,$$

adică

$$x'^k = \beta_j^k\, x^j.$$

2.1.56 Propoziţie. *Orice spaţiu vectorial complex $\mathcal{V}$ are o o structură naturală de spaţiu vectorial real care se poate obţine prin* restricţia scalarilor *şi*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}.$$

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o bază a spaţiului vectorial complex $\mathcal{V}$. Oricare ar fi $x \in \mathcal{V}$ există numerele complexe $\alpha_1+\beta_1\mathrm{i}$, $\alpha_2+\beta_2\mathrm{i}$, ... , $\alpha_n+\beta_n\mathrm{i}$ astfel încât

$$x = (\alpha_1+\beta_1\mathrm{i})v_1 + (\alpha_2+\beta_2\mathrm{i})v_2 + \cdots + (\alpha_n+\beta_n\mathrm{i})v_n.$$

Scriind această relaţie sub forma

$$x = \alpha_1\, v_1 + \beta_1\, \mathrm{i}v_1 + \alpha_2\, v_2 + \beta_2\, \mathrm{i}v_2 + \cdots + \alpha_n\, v_n + \beta_n\, \mathrm{i}v_n,$$

deducem că

$$\mathcal{B} = \{\, v_1,\, \mathrm{i}v_1,\, v_2,\, \mathrm{i}v_2,\, ...\,,\, v_n,\, \mathrm{i}v_n \,\}$$

este sistem de generatori pentru spaţiul vectorial real $\mathcal{V}$. Arătăm că vectorii care formează sistemul $\mathcal{B}$ sunt liniar independenţi peste $\mathbb{R}$. Relaţia

$$\alpha_1\, v_1 + \beta_1\, \mathrm{i}v_1 + \alpha_2\, v_2 + \beta_2\, \mathrm{i}v_2 + \cdots + \alpha_n\, v_n + \beta_n\, \mathrm{i}v_n = 0$$

se poate scrie

$$(\alpha_1+\beta_1\mathrm{i})v_1 + (\alpha_2+\beta_2\mathrm{i})v_2 + \cdots + (\alpha_n+\beta_n\mathrm{i})v_n = 0$$

şi conduce la $\alpha_1 + \beta_1\mathrm{i} = \alpha_2 + \beta_2\mathrm{i} = \cdots = \alpha_n + \beta_n\mathrm{i} = 0$, adică la

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \cdots = \alpha_n = \beta_n = 0.$$

2.1.57 Propoziţie. *Dacă $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial real, atunci spaţiul*

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} = \{\ (x_1, x_2)\ \mid\ \ x_1,\, x_2 \in \mathcal{V}\ \}$$

considerat împreună cu adunarea pe componente

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$$

şi înmulţirea cu numere complexe

$$(\alpha+\beta\mathrm{i})(x_1, x_2) = (\alpha x_1-\beta x_2,\, \alpha x_2+\beta x_1)$$

este un spaţiu vectorial complex notat cu ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{V}$ şi

$$\dim_{\mathbb{C}} {}^{\mathbb{C}}\mathcal{V} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$$

(*spaţiul ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{V}$ se numeşte* complexificatul *lui $\mathcal{V}$*)

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o bază a spaţiului vectorial real $\mathcal{V}$. Arătăm că

$$\mathcal{B} = \{\, (v_1, 0),\, (v_2, 0),\, \ldots,\, (v_n, 0)\,\}$$

este bază a spaţiului vectorial complex ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{V}$. Oricare ar fi $x_1,\, x_2 \in \mathcal{V}$, există numerele reale $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\, ,\, \alpha_n$ şi $\beta_1,\, \beta_2\, ,\, \ldots\, ,\, \beta_n$ astfel încât

$$x_1 = \alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_n\, v_n, \qquad x_2 = \beta_1\, v_1 + \beta_2\, v_2 + \cdots + \beta_n\, v_n.$$

Deoarece $\mathrm{i}(v_j,\, 0) = (0,\, v_j)$, avem

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= (\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_n\, v_n,\, 0) + (0,\, \beta_1\, v_1 + \beta_2\, v_2 + \cdots + \beta_n\, v_n) \\ &= (\alpha_1{+}\beta_1\mathrm{i})(v_1, 0) + (\alpha_2{+}\beta_2\mathrm{i})(v_2, 0) + \cdots + (\alpha_n{+}\beta_n\mathrm{i})(v_n, 0).\end{aligned}$$

Dacă

$$(\alpha_1{+}\beta_1\mathrm{i})(v_1, 0) + (\alpha_2{+}\beta_2\mathrm{i})(v_2, 0) + \cdots + (\alpha_n{+}\beta_n\mathrm{i})(v_n, 0) = (0, 0),$$

atunci

$$(\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_n\, v_n,\, \beta_1\, v_1 + \beta_2\, v_2 + \cdots + \beta_n\, v_n) = 0$$

ceea ce conduce la $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ şi $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$.

2.1.58 Scriind $x_1{+}x_2\mathrm{i}$ în loc de (x_1, x_2), obţinem

$${}^{\mathbb{C}}\mathcal{V} = \{\, x_1{+}x_2\mathrm{i} \mid\ x_1,\, x_2 \in \mathcal{V}\,\}$$

şi înmulţirea cu scalari

$$(\alpha{+}\beta\mathrm{i})(x_1{+}x_2\mathrm{i}) = (\alpha x_1{-}\beta x_2) + (\alpha x_2{+}\beta x_1)\mathrm{i}$$

coincide formal cu înmulţirea numerelor complexe.

2.1.59 Definiţie. Prin *relaţie de echivalenţă* pe o mulţime M se înţelege o submulţime $\mathcal{R} \subseteq M \times M$ cu proprietăţile:

1) $(x, x) \in \mathcal{R}, \qquad \forall x \in M \qquad$ (reflexivitate);
2) $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \in \mathcal{R} \qquad$ (simetrie);
3) $\left.\begin{matrix}(x, y) \in \mathcal{R} \\ (y, z) \in \mathcal{R}\end{matrix}\right\} \implies (x, z) \in \mathcal{R} \qquad$ (tranzitivitate).

În loc de $(x, y) \in \mathcal{R}$ se preferă să se scrie $x \mathcal{R} y$ sau $x \sim y$.

2.1.60 Definiţie. Prin *partiţie* a unei mulţimi M se înţelege o familie $\{M_i\}_{i\in J}$ de submulţimi ale lui M cu proprietăţile:

1) $M_i \neq \emptyset, \qquad \forall i \in J$
2) $M_i \cap M_j = \emptyset, \qquad \forall i, j \in J \ \text{ cu } \ i \neq j$
3) $\bigcup_{i\in J} M_i = M.$

2.1.61 Propoziţie. *a) Dacă $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe M, atunci mulţimile distincte de forma*

$$\hat{x} = \{\ y \mid y \sim x\ \} \qquad (\textit{clasă de echivalenţă a lui } x)$$

formează o partiţie a lui M, notată cu $M/\!\sim$.

b) Invers, dacă $\{M_i\}_{i\in J}$ este o partiţie a lui M, atunci relaţia

$$x \sim y \quad \textit{dacă există } i \in J \quad \textit{astfel încât} \quad x, y \in M_i$$

este o relaţie de echivalenţă pe M.

Demonstraţie. a) Reunind toate clasele de echivalenţă obţinem mulţimea M şi avem $\hat{x} \neq \emptyset$ deoarece $x \in \hat{x}$. În plus,

$$x \in \hat{y} \cap \hat{z} \quad \Longrightarrow \begin{cases} x \sim y \\ x \sim z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y \sim z \quad \Longrightarrow \quad \hat{y} = \hat{z}.$$

b) Evident, relaţia $\sim$ este reflexivă şi simetrică. Dacă $x \sim y$ şi $y \sim z$, atunci există $i, j \in J$ astfel încât $x, y \in M_i$ şi $y, z \in M_j$. Mulţimile partiţiei fiind disjuncte, rezultă că $M_i = M_j$ şi prin urmare $x \sim z$.

2.1.62 Propoziţie. *Dacă $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ şi $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este un subspaţiu vectorial, atunci relaţia*

$$x \sim y \qquad \textit{dacă} \quad x - y \in \mathcal{W}$$

este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{V}$. Mulţimea factor $\mathcal{V}/\!\sim$ formată din toate clasele de echivalenţă

$$\hat{x} = x + \mathcal{W} = \{\ x + y \mid \ y \in \mathcal{W}\ \}$$

considerată împreună cu operaţiile

$$\hat{x} + \hat{y} = \widehat{xy}, \qquad \alpha\hat{x} = \widehat{\alpha x},$$

este spaţiu vectorial (numit spaţiu factor *şi notat cu $\mathcal{V}/\mathcal{W}$).*

Demonstraţie. Avem

$$x - x = 0 \in \mathcal{W} \implies x \sim x,$$

$$x \sim y \implies x - y \in \mathcal{W} \implies y - x \in \mathcal{W} \implies y \sim x,$$

$$\left.\begin{array}{l} x \sim y \\ y \sim z \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x - y \in \mathcal{W} \\ y - z \in \mathcal{W} \end{array}\right\} \Longrightarrow x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{W} \Longrightarrow x \sim z.$$

Deoarece $\mathcal{W} + \mathcal{W} = \{\ x + y \mid x, y \in \mathcal{W}\ \} = \mathcal{W}$ şi $\alpha\mathcal{W} = \{\ \alpha x \mid x \in \mathcal{W}\ \} = \mathcal{W}$, avem

$$(x + \mathcal{W}) + (y + \mathcal{W}) = x + y + \mathcal{W}, \qquad \alpha(x + \mathcal{W}) = \alpha x + \mathcal{W}$$

ceea ce arată că operaţiile cu clase de echivalenţă sunt bine definite (nu depind de reprezentantul ales). Elementul neutru este $\hat{0} = 0 + \mathcal{W} = \mathcal{W}$, iar opusul lui $\hat{x}$ este $-\hat{x} = \widehat{-x} = -x + \mathcal{W}$.

2.1.63 Exerciţiu. Descrieţi spaţiul vectorial factor $\mathbb{R}^2/\mathcal{W}$ în cazul

$$\mathcal{W} = \{\ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\ \}.$$

Rezolvare. În acest caz

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow (x, y) - (x', y') \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow y = y'.$$

Rezultă că

$$\widehat{(x, y)} = (x, y) + \mathcal{W} = \{\ (x', y) \mid x' \in \mathbb{R}\ \}$$

şi prin urmare

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{W} = \{\ \widehat{(0, y)} \mid y \in \mathbb{R}\ \}.$$

Trecerea de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^2/\mathcal{W}$ se realizează "ignorând" coordonata x, adică identificând vectorii (x, y) din $\mathbb{R}^2$ cu acelaşi y. Elementele lui $\mathbb{R}^2/\mathcal{W}$ sunt clasele de echivalenţă $\widehat{(0, y)}$, adică dreptele paralelele cu Ox.

2.1.64 Teoremă. *Dacă $\mathcal{W}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$, atunci*

$$\dim \mathcal{V}/\mathcal{W} = \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{W}.$$

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ o bază a lui $\mathcal{W}$ pe care o completăm până la o bază $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ a lui $\mathcal{V}$. Arătăm că $\{\hat{v}_{k+1}, \hat{v}_{k+2}, \ldots, \hat{v}_n\}$ este bază a lui $\mathcal{V}/\mathcal{W}$. Dacă

$$x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + ... + \alpha_n v_n \in \mathcal{V},$$

atunci

$$\hat{x} = \alpha_1 \hat{v}_1 + ... + \alpha_k \hat{v}_k + \alpha_{k=1} \hat{v}_{k+1} + ... + \alpha_n \hat{v}_n = \alpha_{k+1} \hat{v}_{k+1} + ... + \alpha_n \hat{v}_n.$$

Rezultă că $\{\hat{v}_{k+1},\ \hat{v}_{k+2},\ ...\ ,\ \hat{v}_n\}$ este sistem de generatori. Pe de altă parte, dacă

$$\alpha_{k+1} \hat{v}_{k+1} + \alpha_{k+2} \hat{v}_{k+2} + ... + \alpha_n \hat{v}_n = \hat{0},$$

atunci

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + ... + \alpha_n v_n \in \mathcal{W}$$

şi deci există $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...\ ,\ \alpha_k \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + ... + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k,$$

relaţie care conduce la $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = ... = \alpha_n = 0$.

2.2 Transformări liniare

2.2.1 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$. O aplicaţie

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} :\ x \mapsto Ax$$

este numită *transformare liniară* (sau *operator liniar*, *aplicaţie liniară*) dacă

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \qquad \forall x, y \in \mathcal{V},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

2.2.2 Utilizăm notaţiile

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \{\, A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \mid A \text{ este transformare liniară } \}$$
$$\mathcal{L}(V) = \{\, A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \mid A \text{ este operator liniar } \}.$$

2.2.3 Exerciţiu. Dacă $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, atunci $A0 = 0$.

2.2.4 Exerciţiu. Să se arate că

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ x_1 + x_3)$$

este transformare liniară.

Rezolvare. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ şi $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ vectori din $\mathbb{R}^3$. Avem

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)) \\ &= A((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)) \\ &= A(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3),\ \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_3 + \beta y_3) \\ &= (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3,\ \alpha x_1 + \alpha x_3) + (\beta y_1 + 2\beta y_2 - \beta y_3,\ \beta y_1 + \beta y_3) \\ &= \alpha(x_1 + 2x_2 - x_3,\ x_1 + x_3) + \beta(y_1 + 2y_2 - y_3,\ y_1 + y_3) \\ &= \alpha A(x_1, x_2, x_3) + \beta A(y_1, y_2, y_3) = \alpha Ax + \beta Ay. \end{aligned}$$

2.2.5 Exerciţiu. Să se arate că

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3,\ x_1 + x_3,\ x_1 + x_2)$$

este operator liniar.

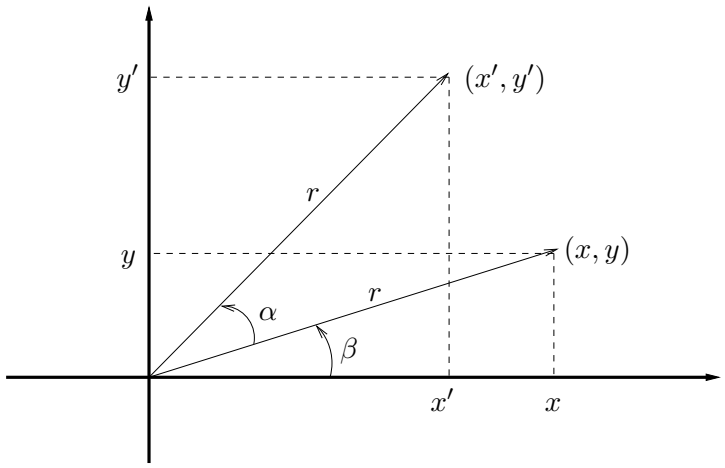

Figura 2.1: Rotaţia planului de unghi α .

2.2.6 Exerciţiu. Să se arate că rotaţia planului de unghi α este un operator liniar.

Indicaţie. Identificăm planul cu spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$. Expresia în coordonate a rotaţiei de unghi α este

$$\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \ (x, y) \mapsto (x', y'),$$

unde (v. Fig. 2.1)

$$x' = r\,\cos(\beta+\alpha) = r\,\cos\beta\,\cos\alpha - r\,\sin\beta\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = r\,\sin(\beta+\alpha) = r\,\cos\beta\,\sin\alpha + r\,\sin\beta\cos\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

adică

$$\mathcal{R}_\alpha(x,y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

2.2.7 Exerciţiu. Fie

$$\mathcal{V} = \{\ a_0x^2 + a_1x + a_2 \mid\ a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\,\}$$

spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2.
Să se arate că operatorul de derivare

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \qquad \frac{d}{dx}(a_0x^2 + a_1x + a_2) = 2a_0x + a_1,$$

este operator liniar.

2.2.8 Exerciţiu. Compusa a două transformări liniare este transformare liniară.

2.2.9 Propoziţie. *Dacă $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ este o transformare liniară, atunci*

$$\ker A \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \in \mathcal{V} \mid Ax = 0\,\}$$

este subspaţiu al lui $\mathcal{V}$, numit nucleul *lui A, şi*

$$\operatorname{im} A \stackrel{\text{def}}{=} \{\, Ax \mid x \in \mathcal{V}\,\}$$

este subspaţiu al lui $\mathcal{W}$, numit imaginea *lui A.*

Demonstraţie. Avem

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in \ker A \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \implies A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0 \implies \alpha x + \beta y \in \ker A.$$

Dacă $v, w \in \operatorname{im} A$, atunci există $x, y \in \mathcal{V}$ încât $v = Ax$ şi $w = Ay$. Oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avem

$$\alpha v + \beta w = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y),$$

ceea ce arată că $\alpha v + \beta w \in \operatorname{im} A$.

2.2.10 MATHEMATICA: Bază în ker A

```
In[1]:=MatrixForm[{{1, 2, 3}, {2, 4, 6}, {3, 6, 9}}]
```
$\mapsto$ Out[1]=
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

```
In[2]:=NullSpace[{{1, 2, 3}, {2, 4, 6}, {3, 6, 9}}]
```
$\mapsto$ Out[2]={{−3,0,1},{−2,1,0}}

2.2.11 Teoremă. *Dacă $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial finit-dimensional şi*

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$

o transformare liniară, atunci

$$\dim \mathcal{V} = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A.$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_0 = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ o bază a subspaţiului $\ker A$, unde $k = \dim \operatorname{Ker} A$. Acest sistem de vectori liniar independenţi îl prelungim până la o bază a lui $\mathcal{V}$

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\},$$

unde $n = \dim \mathcal{V}$. Vom arăta că

$$\mathcal{B}' = \{Av_{k+1}, Av_{k+2}, ..., Av_n\}$$

este o bază a subspaţiului $\operatorname{im} A$.
$\mathcal{B}'$ *este sistem de vectori liniar independenţi*: Din

$$\alpha_{k+1} Av_{k+1} + \alpha_{k+2} Av_{k+2} + \cdots + \alpha_n Av_n = 0$$

rezultă

$$A(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0,$$

ceea ce arată că $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \cdots + \alpha_n v_n \in \ker A$. Sistemul de vectori $\mathcal{B}_0$ fiind o bază în $\ker A$, rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \cdots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k,$$

adică

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \alpha_{k+2} v_{k+2} - \cdots - \alpha_n v_n = 0.$$

Deoarece $\mathcal{B}$ este bază în $\mathcal{V}$, acestă relaţie este posibilă doar în cazul

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \cdots = \alpha_n = 0,$$

ceea ce arată că $\mathcal{B}'$ este sistem de vectori liniar independenţi.
$\mathcal{B}'$ *este sistem de generatori*: Oricare ar fi $y \in \operatorname{im} A$ există $x \in \mathcal{V}$ astfel încât $y = Ax$. Plecând de la reprezentarea $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ a lui x în baza $\mathcal{B}$ se obţine

$$\begin{aligned} y = Ax &= \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \cdots + \lambda_k Av_k + \lambda_{k+1} Av_{k+1} + \cdots + \lambda_n Av_n \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 + \lambda_k Av_k + \lambda_{k+1} Av_{k+1} + \cdots + \lambda_n Av_n, \end{aligned}$$

ceea ce arată că $\mathcal{B}'$ este sistem de generatori pentru $\operatorname{im} A$.

2.2.12 Exerciţiu. Fie aplicaţia liniară $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_3,\ 2x_1 + x_2,\ x_2 + 2x_3).$$

Descrieţi $\ker A$ şi $\operatorname{im} A$ indicând baze în aceste subspaţii.

Rezolvare. Avem

$$\ker A = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} = \{\, \alpha(1, -2, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}.$$

Rezultă că $\{(1, -2, 1)\}$ este bază în $\ker A$. Completăm această bază până la baza $\{(1, -2, 1),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$ a lui $\mathbb{R}^3$. Din demonstraţia teoremei precedente rezultă că $\{A(0, 1, 0),\ A(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1, 1),\ (1, -1, 0, 2)\}$ este bază a subspaţiului vectorial $\operatorname{im} A$.

2.2.13 Exerciţiu. Fie operatorul liniar

$$P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad A(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$

Descrieţi $\ker P$ şi $\operatorname{im} P$ indicând baze în aceste subspaţii.

2.2.14 Propoziţie. *Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ o transformare liniară.*

a) Transformarea A este injectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

b) Transformarea A este surjectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} A = \mathcal{W}$.

Demonstraţie. a) Ştim că $A0 = 0$. Dacă A este injectivă, atunci $Ax = 0$ implică $x = 0$ şi deci $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Invers, dacă $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, atunci

$$Ax = Ay \implies Ax - Ay = 0 \implies A(x - y) = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y.$$

b) Afirmaţia rezultă din definiţia subspaţiului $\operatorname{Im} A$.

2.2.15 Exerciţiu. Dacă $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ este o transformare liniară injectivă, atunci $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este sistem de vectori liniar independenţi în V dacă şi numai dacă $\{Av_1, Av_2, ..., Av_n\}$ este sistem de vectori liniar independenţi în $\mathcal{W}$.

Rezolvare. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un sistem de vectori liniar independenţi. Relaţia

$$\alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + ... + \alpha_n Av_n = 0,$$

care se mai poate scrie

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = 0,$$

conduce la relaţia

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0,$$

din care rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Invers, presupunând că $\{Av_1, Av_2, ..., Av_n\}$ este sistem de vectori liniar independenţi, relaţia

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

implică

$$\alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + ... + \alpha_n Av_n = 0,$$

relaţie care conduce la $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

2.2.16 Propoziţie. *Inversa unei aplicaţii liniare bijective este o aplicaţie liniară.*

Demonstraţie. Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ o aplicaţie liniară bijectivă. Oricare ar fi $x, y \in \mathcal{W}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, are loc relaţia

$$\alpha x + \beta y = \alpha A(A^{-1}x) + \beta A(A^{-1}y) = A(\alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y)$$

şi prin urmare $A^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y$.

2.2.17 Definiţie. Prin *izomorfism liniar* se înţelege o transformare liniară bijectivă.

2.2.18 Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ o transformare liniară. Avem

$$A \text{ este izomorfism} \iff \begin{cases} \operatorname{Ker} A = \{0\} \\ \operatorname{Im} A = \mathcal{W}. \end{cases}$$

2.2.19 Definiţie. Spunem că spaţiile vectoriale $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ sunt *izomorfe* dacă există un izomorfism liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$.

2.2.20 Teoremă. *Două spaţii vectoriale (finit dimensionale) peste acelaşi corp* $\mathbb{K}$ *sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ spaţii vectoriale peste $\mathbb{K}$ izomorfe şi fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ un izomorfism liniar. Din relaţiile

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}, \qquad \operatorname{Im} A = \mathcal{W}, \qquad \dim \mathcal{V} = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A$$

rezultă că $\dim \mathcal{V}$=$\dim \mathcal{W}$. Invers, dacă $\dim \mathcal{V}$=$\dim \mathcal{W} = n$, alegând o bază $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ în $\mathcal{V}$ şi o bază $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ în $\mathcal{W}$, putem defini izomorfismul

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}, \qquad A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

2.2.21 Privite doar ca spaţii vectoriale, spaţiile izomorfe nu diferă prin nimc unul faţă de altul, şi pot fi identificate. Ele sunt doar reprezentări diferite ale aceluiaşi obiect matematic. În unele construcţii sau aplicaţii, anumite concretizări ale unui spaţiu vectorial pot fi mai utile decât altele.

2.2.22 Teoremă. *Dacă $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$, atunci orice bază*

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

a lui $\mathcal{V}$ (cu ordinea vectorilor fixată) defineşte izomorfismul

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}^n, \qquad A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

care permite identificarea lui $\mathcal{V}$ cu $\mathbb{K}^n$.

Demonstraţie. Aplicaţia A este liniară, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ şi $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$.

2.2.23 Până la un izomorfism,

$$\mathbb{R}, \ \ \mathbb{R}^2, \ \ \mathbb{R}^3, \ ...$$

sunt toate spaţiile vectoriale reale finit-dimensionale, iar

$$\mathbb{C}, \ \ \mathbb{C}^2, \ \ \mathbb{C}^3, \ ...$$

sunt toate spaţiile vectoriale complexe finit-dimensionale posibile.

2.2.24 Exerciţiu. Să se arate că aplicaţia

$$A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

este izomorfism liniar.

2.2.25 Exerciţiu. Să se arate că spaţiile vectoriale reale $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{R}^2$ sunt izomorfe.

Indicaţie. Aplicaţia $A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A(x + y\mathrm{i}) = (x, y)$ este un izomorfism liniar.

2.2.26 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$,
$\mathfrak{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ bază în $\mathcal{V}$,
$\mathfrak{B}_{\mathcal{W}} = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ bază în $\mathcal{W}$,
$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ transformare liniară şi fie

$$Av_i = a_i^j w_j,$$

adică

$$\begin{aligned} Av_1 &= a_1^1 w_1 + a_1^2 w_2 + \cdots + a_1^n w_n, \\ Av_2 &= a_2^1 w_1 + a_2^2 w_2 + \cdots + a_2^n w_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Av_m &= a_m^1 w_1 + a_m^2 w_2 + \cdots + a_m^n w_n. \end{aligned}$$

Matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$$

este numită *matricea lui A în raport cu bazele* $\mathfrak{B}_{\mathcal{V}}$ şi $\mathfrak{B}_{\mathcal{W}}$.

2.2.27 În cazul unei aplicaţii $A : V \longrightarrow V$ alegem, în general, o singură bază.

2.2.28 Orice vector x se poate reprezenta unic sub forma

$$x = x^i v_i, \qquad \text{adică} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x^i v_i$$

şi

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{m} x^i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} x^i \, Av_i = \sum_{i=1}^{m} x^i \left(\sum_{j=1}^{n} a_i^j \, w_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^j \, x^i\right) w_j.$$

Transformarea A este complet determinată de matricea corespunzătoare.

2.2.29 Utilizând notaţiile

$$x = x^i v_i = x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^m v_m, \qquad y = y^j w_j = y^1 w_1 + y^2 w_2 + \cdots + y^n w_n,$$

relaţia $y = Ax$ se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

2.2.30 Exerciţiu. Să se determine matricea aplicaţiei liniare

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad A(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2,\, x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$$

în raport cu bazele

$$\{v_1 = (1,1),\, v_2 = (1,-1)\} \quad \text{în} \quad \mathbb{R}^2,$$

$$\{w_1 = (1,0,0),\, w_2 = (0,1,0),\, w_3 = (0,0,1)\} \quad \text{în} \quad \mathbb{R}^3.$$

Rezolvare. Din relaţiile

$$Av_1 = A(1,1) = (-1,3,0) = -1\, w_1 + 3\, w_2 + 0\, w_3$$

$$Av_2 = A(1,-1) = (5,-1,2) = 5\, w_1 - 1\, w_2 + 2\, w_3$$

rezultă că matricea căutată este

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.31 Propoziţie. *Fie $A : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ două aplicaţii liniare şi fie $\mathcal{B}_\mathcal{U}$, $\mathcal{B}_\mathcal{V}$ şi $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ baze în spaţiile vectoriale $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$, respectiv. Matricea aplicaţiei*

$$BA : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}, \qquad (BA)x = B(Ax)$$

în raport cu bazele $\mathcal{B}_\mathcal{U}$, $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ este produsul dintre matricea aplicaţiei B în raport cu bazele $\mathcal{B}_\mathcal{V}$, $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ şi matricea aplicaţiei A în raport cu bazele $\mathcal{B}_\mathcal{U}$, $\mathcal{B}_\mathcal{V}$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_\mathcal{U} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $\mathcal{B}_\mathcal{V} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ şi $\mathcal{B}_\mathcal{W} = \{w_1, w_2, ..., w_p\}$. Dacă

$$Au_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, v_j, \qquad Bv_j = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\, w_k,$$

atunci

$$\begin{aligned}(BA)u_i &= B(Au_i) = B\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, v_j = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, Bv_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\, w_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}\right) w_k.\end{aligned}$$

2.2.32 Teoremă. *În cazul unei schimbări de bază, matricea unui operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ se transformă conform formulei*

$$A' = S^{-1}AS,$$

unde S este matricea de trecere de la baza veche la cea nouă.

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ două baze în $\mathcal{V}$,

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}, \qquad \text{unde} \qquad v'_i = \alpha_i^j\, v_j,$$

matricea de trecere de la baza $\mathfrak{B}$ la $\mathfrak{B}'$ şi fie

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}, \qquad \text{unde} \qquad Av_i = a_i^k\, v_k,$$

şi

$$A' = \begin{pmatrix} a'^1_1 & a'^1_2 & \cdots & a'^1_n \\ a'^2_1 & a'^2_2 & \cdots & a'^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'^n_1 & a'^n_2 & \cdots & a'^n_n \end{pmatrix}, \qquad \text{unde} \qquad Av'_i = a'^k_i\, v'_k,$$

matricele lui A în raport cu bazele $\mathfrak{B}$ şi respectiv $\mathfrak{B}'$. Din relaţiile

$$\begin{aligned} Av'_i &= A\left(\alpha_i^j\, v_j\right) = \alpha_i^j\, Av_j = \alpha_i^j\, a_j^k\, v_k, \\ Av'_i &= a'^j_i\, v'_j = a'^j_i\, \alpha_j^k\, v_k \end{aligned}$$

rezultă că

$$\alpha_j^k\, a'^j_i = a_j^k \alpha_i^j,$$

adică relaţia $SA' = AS$, care poate fi scrisă sub forma $A' = S^{-1}AS$.

2.2.33 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$ şi $A:\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}$ un operator liniar. Spunem că numărul $\lambda\in\mathbb{K}$ este *valoare proprie* a lui A dacă există un vector $v\neq 0$, numit *vector propriu*, astfel încât

$$Av=\lambda v.$$

2.2.34 Propoziţie. *Dacă λ este valoare proprie a operatorului $A:\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}$, atunci*

$$\mathcal{V}_\lambda=\{\,x\in\mathcal{V}\mid Ax=\lambda x\,\}$$

este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$ (numit subspaţiul propriu *corespunzător valorii proprii λ).*

Demonstraţie. Avem

$$\left.\begin{array}{l}x,y\in\mathcal{V}_\lambda\\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay=\alpha\lambda x+\beta\lambda y=\lambda(\alpha x+\beta y).$$

2.2.35 Exerciţiu. Să se afle valorile proprii ale operatorului

$$A:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad A(x_1,x_2,x_3)=(x_2+x_3,\,x_1+x_3,\,x_1+x_2),$$

şi să se determine subspaţiile proprii corespunzătoare.

Rezolvare. Fie λ valoare proprie. Rezultă că există $x=(x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0)$ încât

$$A(x_1,x_2,x_3)=\lambda(x_1,x_2,x_3),$$

adică

$$(x_2+x_3,\,x_1+x_3,\,x_1+x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3),$$

ceea ce este echivalent cu faptul că sistemul omogen

$$\left\{\begin{array}{l}x_2+x_3=\lambda x_1\\ x_1+x_3=\lambda x_2\\ x_1+x_2=\lambda x_3,\end{array}\right.$$

adică

$$\left\{\begin{array}{l}-\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2-\lambda x_3=0\end{array}\right.$$

admite şi alte soluţii în afară de $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$. Ştim că acest lucru se întâmplă dacă şi numai dacă λ este astfel încât

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{2.8}$$

adică dacă

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0,$$

relaţie care conduce la valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ şi $\lambda_3 = 2$. Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{-1} &= \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = -x \,\} \\ &= \{\, (x_1, x_2, x_3) \mid (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) = (-x_1, -x_2, -x_3) \,\} \\ &= \{\, (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,\} = \{\, (\alpha, \beta, -\alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} \end{aligned}$$

şi

$$\mathcal{V}_2 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 2x \,\} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3 \,\} = \{\alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}.$$

2.2.36 În raport cu baza canonică $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$, matricea lui A este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

iar ecuaţia (2.8) s-a obţinut scăzând λ din fiecare element situat pe diagonala principală. Ecuaţia (2.8) se mai poate scrie

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

unde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea unitate.

2.2.37 Propoziţie. *Polinomul (numit* polinomul caracteristic*)*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

asociat unui operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ folosind matricea într-o bază fixată, nu depinde de baza aleasă.

Demonstraţie. Avem

$$\det(A' - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S)$$

$$= \det S^{-1} \det(A - \lambda I) \det \mathrm{S} = \tfrac{1}{\det S} \det(A - \lambda I) \det \mathrm{S} = \det(A - \lambda I).$$

2.2.38 Deoarece

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})\lambda^{n-1} + ... + \det A,$$

rezultă că în cazul unui operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, urma operatorului

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

şi $\det A$, numere definite cu ajutorul unei baze, nu depind de baza aleasă.

2.2.39 MATHEMATICA: `Det[A]`, `Tr[A]`, `CharacteristicPolynomial[A,t]` ,

```
In[1]:=Det[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]                          ↦  Out[1]=0
In[2]:=Tr[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]                          ↦  Out[2]=15
In[3]:=CharacteristicPolynomial[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}},t]  ↦  Out[3]=18t+15t^2-t^3
```

2.2.40 Propoziţie (Ciclicitatea urmei).

Dacă $A, B, C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ sunt operatori liniari, atunci

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA \qquad \text{şi} \qquad \operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} BCA = \operatorname{tr} CAB.$$

Demonstraţie. Dacă a_i^j şi b_i^j sunt elementele matricelor A şi B într-o bază fixată, atunci

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i,j} a_i^j \, b_j^i = \sum_{i,j} b_j^i \, a_i^j = \operatorname{tr} BA.$$

Utilizând această proprietate a urmei, obţinem

$$\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} A(BC) = \operatorname{tr} (BC)A = \operatorname{tr} BCA,$$
$$\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} (AB)C = \operatorname{tr} C(AB) = \operatorname{tr} CAB.$$

2.2.41 Teoremă. *Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$ şi fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un operator liniar. Numărul $\lambda \in \mathbb{K}$ este valoare proprie a lui A dacă şi numai dacă este rădăcină a polinomului caracteristic, adică $P(\lambda) = 0$.*

Demonstraţie. Conform definiţiei, $\lambda \in \mathbb{K}$ este valoare proprie dacă şi numai dacă există $x \neq 0$ cu $Ax = \lambda x$. Într-o bază fixată, acest lucru este echivalent cu faptul că sistemul

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

are şi alte soluţii în afară de $(0, 0, ..., 0)$, ceea ce are loc dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

În cazul în care $\mathcal{V}$ este spaţiu vectorial real, numai rădăcinile reale ale polinomului caracteristic sunt valori proprii ale lui A.

2.2.42 Definiţie. Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un operator liniar. Spunem că subspaţiul $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este *subspaţiu invariant* dacă

$$A(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W},$$

adică dacă

$$w \in \mathcal{W} \Longrightarrow Aw \in \mathcal{W}.$$

2.2.43 Propoziţie. *Subspaţiile proprii ale unui operator liniar sunt invariante.*

Demonstraţie. Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un operator liniar, λ o valoare proprie a lui A şi fie $\mathcal{V}_\lambda$ subspaţiul propriu corespunzător. Dacă $w \in \mathcal{V}_\lambda$, atunci $Aw = \lambda w \in \mathcal{V}_\lambda$.

2.2.44 Exerciţiu. Arătaţi că în cazul rotaţiei de unghi α în jurul axei Oz

$$\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{R}_\alpha(x, y, z) = (x \cos\alpha - y \sin\alpha,\ x \sin\alpha + y \cos\alpha,\ z)$$

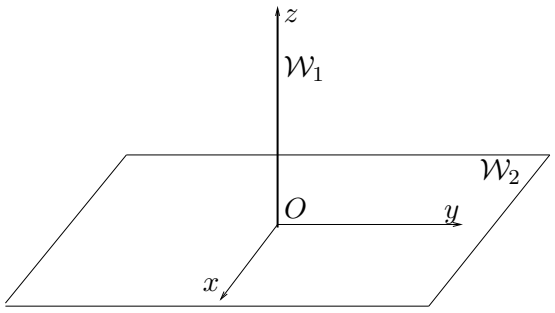

Figura 2.2: Subspaţiile invariante ale unei rotaţii în jurul lui Oz.

subspaţiile

$$\mathcal{W}_1 = \{\,(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\,\} \qquad \text{(axa } Oz\text{)},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{\,(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\,\} \qquad \text{(planul } xOy\text{)}$$

sunt subspaţii invariante (v. Fig. 2.2).

2.2.45 Propoziţie. *Dacă subspaţiul $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ de dimensiune m este subspaţiu invariant al operatorului $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, atunci există o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ în raport cu care matricea lui A are forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m+2,m+1} & \cdots & a_{m+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie. Baza $\mathcal{B}$ se poate obţine completând o bază $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ a lui $\mathcal{W}$ până la o bază a lui $\mathcal{V}$.

2.2.46 Am arătat că valorile proprii ale operatorului

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3,\, x_1 + x_3,\, x_1 + x_2),$$

sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ şi că subspaţiile proprii corespunzătoare sunt

$$\mathcal{V}_{-1} = \{\, \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\}$$

şi

$$\mathcal{V}_2 = \{\alpha(1,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\,\}.$$

Matricea lui A în raport cu baza

$$\{v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (0,1,-1),\ v_3 = (1,1,1)\}$$

a lui $\mathbb{R}^3$ formată din vectori proprii ai lui A are forma diagonală

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.47 Propoziţie. *Matricea unui operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ în raport cu o bază $\mathcal{B}$ este o matrice diagonală dacă şi numai dacă $\mathcal{B}$ este formată doar din vectori proprii ai lui A.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{V}$ formată din vectori proprii ai lui A

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

(unele dintre numerele λ_1, λ_2, ..., λ_n putând fi egale), atunci matricea lui A în această bază este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Invers, dacă matricea lui A în raport cu o bază $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ are forma

diagonală

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

atunci

$$Aw_i = \alpha_i\, w_i,$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Deoarece o bază nu poate conţine vectorul nul, rezultă că w_1, w_2, ..., w_n sunt vectori proprii ai lui A şi α_1, α_2, ..., α_n valorile proprii corespunzătoare.

2.2.48 Exerciţiu. Nu există o bază în raport cu care matricea operatorului

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad A(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2,\, 2x_2),$$

să fie matrice diagonală.

Rezolvare. Este suficient să arătăm că nu există o bază a lui $\mathbb{R}^2$ formată din vectori proprii ai lui A. În raport cu baza canonică $\{e_1 = (1, 0),\, e_2 = (0, 1)\}$, matricea lui A este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$$

admite rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Singura valoare proprie este $\lambda = 2$ şi subspaţiul propriu corespunzător este

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid A(x_1, x_2) = 2(x_1, x_2)\ \} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x_1 + x_2, 2x_2) = (2x_1, 2x_2)\ \} \\ &= \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

ceea ce arată că toţi vectorii proprii ai lui A sunt de forma $\alpha(1, 0)$. Nu există doi vectori proprii liniar independenţi care să formeze o bază a lui $\mathbb{R}^2$.

2.2.49 Exerciţiu. Rotaţia de unghi α a planului

$$\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \mathcal{R}_\alpha(x,y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

admite valori proprii numai în cazul în care $\alpha \in mathbbZ\pi$.

2.2.50 Studiul unui operator liniar devine mai uşor de realizat prin utilizarea unei baze în raport cu care matricea lui este diagonală. O astfel de bază nu există în toate cazurile.

2.2.51 Dacă există o bază în raport cu care matricea lui A este diagonală

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

atunci rădăcinile polinomului caracteristic

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)\cdots(\alpha_n-\lambda)$$

sunt α_1, α_2, ..., α_n, şi aparţin toate lui $\mathbb{K}$ (numărul lor, ţinând seama de multiplicităţi, este $\dim \mathcal{V}$).

2.2.52 Definiţie. Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un operator liniar şi λ o valoare proprie a lui A.
Spunem că λ are *multiplicitatea algebrică* k dacă este rădăcină de ordinul k a polinomului caracteristic.
Prin *multiplicitate geometrică* a lui λ se înţelege dimensiunea subspaţiului propriu $\mathcal{V}_\lambda$ corespunzător lui λ.

2.2.53 Propoziţie. *Dacă v_1, ..., v_k sunt vectori proprii ai operatorului $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ corespunzători la valori proprii distincte λ_1, ..., λ_k,*

$$Av_i = \lambda_i v_i,$$

atunci $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *este sistem de vectori liniar independenţi.*

Demonstraţie (cazul $n = 3$). Din

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \tag{2.9}$$

rezultă $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = 0$, adică relaţia

$$\alpha_1 \, Av_1 + \alpha_2 \, Av_2 + \alpha_3 \, Av_3 = 0,$$

care se mai scrie

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \alpha_3 \lambda_3 v_3 = 0. \tag{2.10}$$

Adunând relaţia (2.10) cu relaţia (2.9) înmulţită cu $(-\lambda_3)$ se obţine

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)v_2 = 0. \tag{2.11}$$

Aplicând operatorul A relaţiei (2.11) obţinem

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1 v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2 v_2 = 0. \tag{2.12}$$

Adunând relaţia (2.12) cu relaţia (2.11) înmulţită cu $(-\lambda_2)$ rezultă

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0.$$

Deoarece λ_1, λ_2, λ_3 sunt distincte şi $v_1 \neq 0$, rezultă $\alpha_1 = 0$ şi apoi din (2.11) obţinem $\alpha_2 = 0$. Înlocuind în (2.9) pe α_1 şi α_2 cu 0, deducem că $\alpha_3 = 0$.

2.2.54 Din propoziţia anterioară rezultă existenţa formei diagonale în cazul în care rădăcinile polinomului caracteristic sunt distincte şi toate aparţin corpului $\mathbb{K}$ peste care este considerat $\mathcal{V}$.

2.2.55 Teoremă. *Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$ şi fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un operator liniar. Există o bază a lui $\mathcal{V}$ în raport cu care matricea lui A este diagonală dacă şi numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic aparţin lui $\mathbb{K}$ şi pentru fiecare dintre ele multiplicitatea algebrică este egală cu cea geometrică.*

Demonstraţie. (în cazul a două rădăcini $\lambda_1 \neq \lambda_2$ cu multiplicităţile 2 şi respectiv 3). În cazul considerat $\dim \mathcal{V} = 2+3 = 5$, $\dim \mathcal{V}_{\lambda_1} = 2$ şi $\dim \mathcal{V}_{\lambda_2} = 3$. Fie $\{v_1, v_2\}$ bază în

$$\mathcal{V}_{\lambda_1} = \{ \, x \in \mathcal{V} \mid Ax = \lambda_1 x \, \}$$

şi $\{w_1, w_2, w_3\}$ bază în

$$\mathcal{V}_{\lambda_2} = \{\ x \in \mathcal{V} \mid Ax = \lambda_2 x\ \}.$$

Este suficient să arătăm că $\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3\}$ este bază în $\mathcal{V}$. Fie

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 + \alpha_5 w_3 = 0. \tag{2.13}$$

Aplicând A obţinem

$$\lambda_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \lambda_2(\alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 + \alpha_5 w_3) = 0.$$

Adunând această relaţie cu relaţia (2.13) înmulţită cu $(-\lambda_2)$, obţinem

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0$$

de unde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Înlocuind în (2.13), rezultă $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.

2.2.56 Fiecare matrice

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

poate fi privită ca fiind matricea în raport cu baza canonică

$$\mathfrak{B} = \{e_1 = (1,0,0,...,0),\ e_2 = (0,1,0,...,0),\ ...\ ,\ e_n = (0,0,...,0,1)\}$$

a operatorului liniar

$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \qquad A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

2.2.57 Valorile proprii ai unei matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ coincid cu valorile proprii ale operatorului liniar asociat $A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$.

2.2.58 **MATHEMATICA:** `Eigenvalues[A]`, `Eigenvectors[A]`

`In[1]:=MatrixForm[{{0,1,1}, {1,0,1}, {1,1,0}}]` $\mapsto$ Out[1]=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

`In[2]:=Eigenvalues[{{0,1,1}, {1,0,1}, {1,1,0}}]` $\mapsto$ Out[2]={2,−1,−1}

`In[3]:=Eigenvectors[{{0,1,1}, {1,0,1}, {1,1,0}}]` $\mapsto$ Out[3]={{1,1,1},{−1,0,1},{−1,1,0}}

2.2.59 O matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este *diagonalizabilă* dacă operatorul liniar asociat $A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ este diagonalizabil.

2.3 Dualul unui spaţiu vectorial

2.3.1 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. O funcţie

$$\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

este numită *formă liniară* dacă

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{V},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

2.3.2 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este bază în $\mathcal{V}$ şi $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ este formă liniară, atunci există numerele $\varphi_i = \varphi(v_i)$, unic determinate, astfel încât

$$\varphi(x) = \varphi_i x^i, \qquad \text{adică} \qquad \varphi(x^i v_i) = \varphi_i x^i.$$

2.3.3 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Spaţiul $\mathcal{V}^* = \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{K})$, adică

$$\mathcal{V}^* = \{\, \varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K} \ \mid\ \varphi \text{ este formă liniară } \}$$

considerat împreună cu adunarea

$$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{V}^* :\ (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi, \qquad \text{unde} \quad \begin{array}{l} \varphi + \psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}, \\ (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \end{array}$$

şi înmulţirea cu scalari

$$\mathbb{K} \times \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{V}^* :\ (\lambda, \varphi) \mapsto \lambda\varphi, \qquad \text{unde} \quad \begin{array}{l} \lambda\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}, \\ (\lambda\varphi)(x) = \lambda\, \varphi(x) \end{array}$$

este spaţiu vectorial (numit *dualul* lui $\mathcal{V}$).

2.3.4 Teoremă *Dacă $\mathcal{V}$ este spaţiu vectorial, atunci*

$$\dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V}.$$

Demonstraţie Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ o bază în $\mathcal{V}$. Arătăm că $\mathfrak{B}^* = \{v^1, ..., v^n\}$, unde

$$v^i : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad v^i(v_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad i = j, \\ 0 & \text{for} \quad i \neq j, \end{cases}$$

adică

$$v^i : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad v^i(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n) = x^i,$$

este bază în $\mathcal{V}^*$. Fie

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n = 0,$$

adică

$$(\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n)(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{V},$$

sau echivalent

$$\alpha_1 v^1(x) + \alpha_2 v^2(x) + \cdots + \alpha_n v^n(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Alegând $x = v_1$ obţinem $\alpha_1 = 0$, alegănd $x = v_2$ obţinem $\alpha_2 = 0$, etc.
Dacă $\varphi \in V^*$, atunci notând $\varphi_i = \varphi(v_i)$ obţinem

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n) = x^1\,\varphi(v_1) + x^2\,\varphi(v_2) + \cdots + x^n\,\varphi(v_n)\\ &= v^1(x)\,\varphi_1 + v^2(x)\,\varphi_2 + \cdots + v^n(x)\,\varphi_n = (\varphi_1 v^1 + \varphi_2 v^2 + \cdots + \varphi_n v^n)(x),\end{aligned}$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{V}$, adică

$$\varphi = \varphi_1 v^1 + \varphi_2 v^2 + \cdots + \varphi_n v^n = \varphi_i v^i.$$

2.3.5 Definiţie. Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o bază în $\mathcal{V}$. Baza lui $\mathcal{V}^*$

$$\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, ..., v^n\},$$

formată din formele liniare $v^i : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, definite prin

$$v^i(v_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{pentru} \quad i = j,\\ 0 & \text{pentru} \quad i \neq j,\end{cases}$$

adică din funcţiile

$$v^i : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad v^i(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n) = x^i$$

este numită *duala* bazei $\mathfrak{B}$.

2.3.6 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este o bază în $\mathcal{V}$ şi $\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, ..., v^n\}$ este duala ei

$$\begin{array}{lll} x \in \mathcal{V} & \Longrightarrow & x = x^i v_i \qquad \text{cu} \quad x^i = v^i(x)\\ \varphi \in \mathcal{V}^* & \Longrightarrow & \varphi = \varphi_i v^i \qquad \text{cu} \quad \varphi_i = \varphi(v_i).\end{array}$$

2.3.7 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este o bază în $\mathcal{V}$ şi $\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, ..., v^n\}$ duala ei, atunci

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}^n : \; x \mapsto \begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix} \qquad \text{şi} \qquad \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K}^n : \varphi \mapsto (\varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; ... \;\; \varphi_n)$$

sunt izomorfisme care permit identificarea spaţiilor $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{V}^*$ cu $\mathbb{K}^n$. Avem

$$\varphi(x) = (\varphi_i v^i)(x) = \varphi_i x^i = (\varphi_1 \ \ \varphi_2 \ \ \dots \ \ \varphi_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

2.3.8 Teoremă. *Fie $\mathcal{V}$ spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$,*
$\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ *două baze în $\mathcal{V}$,*
$\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, ..., v^n\}$, $\mathfrak{B}'^* = \{v'^1, v'^2, ..., v'^n\}$ *dualele lor şi*

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

matricele de trecere între $\mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{B}'$. Oricare ar fi

$$x = x^j v_j = x'^i v'_i \in \mathcal{V} \qquad şi \qquad \varphi = \varphi_j v^j = \varphi'_i v'^i \in \mathcal{V}^*$$

avem

$$\begin{aligned} v'_i &= \alpha_i^j v_j, & v'^i &= \beta_j^i v^j, \\ \varphi'_i &= \alpha_i^j \varphi_j & x'^i &= \beta_j^i x^j. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Demonstraţie. Avem

$$x^j v_j = x'^i v'_i = x'^i \alpha_i^j v_j \quad \Longrightarrow \quad x^j = \alpha_i^j x'^i \quad \Longrightarrow \quad \beta_j^k x^j = \beta_j^k \alpha_i^j x'^i = \delta_i^k x'^i = x'^k.$$

Deoarece $x'^k = v'^k(x)$ şi $x^j = v^j(x)$, relaţia precedentă se poate scrie sub forma

$$v'^k(x) = \beta_j^k v^j(x) \qquad \text{sau} \qquad v'^k(x) = (\beta_j^k v^j)(x).$$

Relaţia având loc oricare ar fi $x \in \mathcal{V}$, rezultă că

$$v'^k = \beta_j^k v^j.$$

Utilizând liniaritatea lui φ obţinem

$$\varphi'_i = \varphi(v'_i) = \varphi(\alpha_i^j v_j) = \alpha_i^j \varphi(v_j) = \alpha_i^j \varphi_j.$$

2.3.9 Definiţie.

Dualul $\mathcal{V}^{**} = (\mathcal{V}^*)^*$ al dualului lui $\mathcal{V}^*$ este numit *bidualul* lui $\mathcal{V}$.

2.3.10 Avem

$$\mathcal{V}^{**} = \{\, f : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este formă liniară} \,\} \quad \text{şi} \quad \dim \mathcal{V}^{**} = \dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V}.$$

Spaţiile $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{V}^{**}$ având aceeaşi dimensiune, pot fi identificate alegând câte o bază în fiecare dintre ele. Evident, o astfel de identificare se face într-o infinitate de feluri. Arătăm că există un mod natural de a identifica pe $\mathcal{V}$ cu $\mathcal{V}^{**}$. Relaţiile (2.14) arată existenţa unei periodicităţi în trecerea la dual.

2.3.11 Teoremă *Izomorfismul liniar*

$$\Psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}^{**} : \; x \mapsto \Psi[x],$$

prin care x corespunde formei liniare

$$\Psi[x] : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad \Psi[x](f) = f(x),$$

permite o identificare naturală a lui $\mathcal{V}$ cu $\mathcal{V}^{**}$.

Demonstraţie. Funcţia $\Psi[x]$ aparţine spaţiului $\mathcal{V}^{**}$ deoarece

$$\Psi[x](\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x) = \alpha\, \Psi[x](f) + \beta\, \Psi[x](g).$$

Aplicaţia $\Psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}^{**}$ este transformare liniară

$$\Psi[\alpha x + \beta y](f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = (\alpha \Psi[x] + \beta \Psi[y])(f),$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{V}^*$. Transformarea Ψ este injectivă deoarece

$$\Psi[x] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi[x](f) = 0,\ \forall f \in V^* \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0,\ \forall f \in V^*,$$

adică $\ker \Psi = \{0\}$. Din teoremă dimensiunii rezultă relaţia

$$\dim \ker \Psi + \dim \operatorname{im} \Psi = \dim \mathcal{V},$$

care conduce la egalitatea $\operatorname{im} \Psi = \mathcal{V}^{**}$, echivalentă cu surjectivitatea lui Ψ.

2.4 Sume de spaţii vectoriale

2.4.1 Propoziţie. *Dacă $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{V}$ sunt subspaţii vectoriale, atunci*

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$$

este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$.

Demonstraţie. Avem

$$\left.\begin{array}{r} x,y\in\mathcal{W} \\ \alpha,\beta\in\mathbb{K} \end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} x,y\in\mathcal{W}_1 \\ x,y\in\mathcal{W}_2 \\ \alpha,\beta\in\mathbb{K} \end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y\in\mathcal{W}_1 \\ \alpha x+\beta y\in\mathcal{W}_2 \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha x+\beta y\in\mathcal{W}.$$

2.4.2 În general, reuniunea a două subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial $\mathcal{V}$ nu este un subspaţiu vectorial. De exemplu,

$$\mathcal{W}_1=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}\qquad \text{şi}\qquad \mathcal{W}_2=\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$$

sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^2$, dar $\mathcal{W}=\mathcal{W}_1\cup\mathcal{W}_2$ nu este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr, $(1,0)\in\mathcal{W}$ şi $(0,1)\in\mathcal{W}$ dar $(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin\mathcal{W}$.

2.4.3 Propoziţie. *Dacă $\mathcal{W}_1\subseteq\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}_2\subseteq\mathcal{V}$ sunt subspaţii vectoriale, atunci*

$$\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2\overset{\text{def}}{=}\{w_1+w_2\mid w_1\in\mathcal{W}_1,\ w_2\in\mathcal{W}_2\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$.

Demonstraţie. Avem

$$\left.\begin{array}{r} w_1+w_2\in\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2 \\ w_1'+w_2'\in\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2 \\ \alpha,\beta\in\mathbb{K} \end{array}\right\}\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha(w_1+w_2)+\beta(w_1'+w_2') \\ \\ =(\alpha w_1+\beta w_1')+(\alpha w_2+\beta w_2')\in\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2. \end{array}\right.$$

2.4.4 Definiţie. Fie $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2\subseteq\mathcal{V}$ două subspaţii vectoriale. Subspaţiul vectorial

$$\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2=\{w_1+w_2\mid w_1\in\mathcal{W}_1,\ w_2\in\mathcal{W}_2\}$$

este numit *suma directă* a subspaţiilor $\mathcal{W}_1$ şi $\mathcal{W}_2$.

2.4.5 Exerciţiu Să se arate că:

a) $W_1=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$;

b) $W_1=\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$;

c) $W_1+W_2=\mathbb{R}^2$.

2.4.6 Teorema (dimensiunii). *Dacă $\mathcal{W}_1$ şi $\mathcal{W}_2$ sunt subspaţii vectoriale în $\mathcal{V}$, atunci*

$$\dim(\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2)=\dim\mathcal{W}_1+\dim\mathcal{W}_2-\dim(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2).$$

Demonstraţie. Fie

$$\mathcal{B}_0 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ pe care o completăm până la o bază

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_k\}$$

a spaţiului vectorial $\mathcal{W}_1$ şi până la o bază

$$\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, ..., u_n, w_1, w_2, ..., w_m\}$$

a spaţiului vectorial $\mathcal{W}_2$, unde

$$n = \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2), \qquad n + k = \dim \mathcal{W}_1, \qquad n + m = \dim \mathcal{W}_2.$$

Este suficient să arătăm că

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_k, w_1, w_2, ..., w_m\}$$

este o bază a lui $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

$\mathcal{B}$ *este sistem de generatori*: Orice vector de forma $x_1 + x_2$ cu $x_1 \in \mathcal{W}_1$ si $x_2 \in \mathcal{W}_2$ este o combinatie liniara de vectorii lui $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ *este sistem de vectori liniar independenţi*: Relaţia

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k + \gamma_1 w_1 + ... + \gamma_m w_m = 0 \tag{2.15}$$

se poate scrie sub forma

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k = -\gamma_1 w_1 - ... - \gamma_m w_m.$$

Egalitatea dintre vectorul $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k$ aparţinând lui $\mathcal{W}_1$ si vectorul $-\gamma_1 w_1 - ... - \gamma_m w_m$ aparţinând lui $\mathcal{W}_2$ este posibilă numai dacă $-\gamma_1 w_1 - ... - \gamma_m w_m \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, adică dacă există δ_1, δ_2, ..., $\delta_1 \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$-\gamma_1 w_1 - \gamma_2 w_2 - ... - \gamma_m w_m = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + ... + \delta_n u_n.$$

Scriind ultima relaţie sub forma

$$\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + ... + \delta_n u_n + \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + ... + \gamma_m w_m = 0$$

şi ţinând seama de faptul că $\mathcal{B}_2$ este bază în $\mathcal{W}_2$, rezultă

$$\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_n = \gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_m = 0.$$

Relaţia (2.15) devine

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k = 0.$$

Tinând seama de faptul că $\mathcal{B}_1$ este bază în $\mathcal{W}_1$, obţinem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0.$$

Prin urmare $\mathcal{B}$ este bază a lui $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ şi

$$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = n + k + m = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim (\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2).$$

2.4.7 Definiţie. Fie $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ două subspaţii ale spaţiului vectorial $\mathcal{V}$.
Spunem că suma $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ este *directă* şi utilizăm notaţia

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$$

dacă reprezentarea unui vector $w \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ ca suma $w = w_1 + w_2$ a unui vector $w_1 \in \mathcal{W}_1$ şi a unui vector $w_2 \in \mathcal{W}_2$ este unică.

2.4.8 Propoziţie. *Fie $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{V}$ două subspaţii.*
Suma $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ este directă dacă şi numai dacă

$$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{0\}.$$

Demonstraţie. "$\Longrightarrow$" Dacă $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \neq \{0\}$, atunci există $x \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ nenul care admite reprezentările $x = x + 0$ şi $x = 0 + x$, ceea ce arată că suma nu este directă. "$\Longleftarrow$" Fie subspaţiile $\mathcal{W}_1$ şi $\mathcal{W}_2$ cu $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{0\}$. Dacă $v \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ admite reprezentările

$$\begin{array}{lll} v = w_1 + w_2 & \text{cu} & w_1 \in \mathcal{W}_1 \ \text{şi} \ w_2 \in \mathcal{W}_2, \\ v = w_1' + w_2' & \text{cu} & w_1' \in \mathcal{W}_1 \ \text{şi} \ w_2' \in \mathcal{W}_2, \end{array}$$

atunci

$$w_1 + w_2 = w_1' + w_2'.$$

Scriind această relaţie sub forma

$$w_1 - w_1' = w_2 - w_2'$$

din $w_1 - w_1' \in \mathcal{W}_1$, $w_2 - w_2' \in \mathcal{W}_2$ şi $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{0\}$ deducem că $w_1 - w_1' = 0$, $w_2 - w_2' = 0$, adică $w_1 = w_1'$ şi $w_2 = w_2'$, ceea ce arată că suma este directă.

2.4.9 Dacă $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ este sumă directă, atunci $\dim \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2$.

2.4.10 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Rezolvare. Avem

$$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} + \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$
$$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(0,0)\}.$$

2.4.11 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} + \{(x,0,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$$

dar suma nu este directă.

Rezolvare. Orice vector $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ admite reprezentarea

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha,\beta,0) + (0,0,\gamma)$$

cu $(\alpha,\beta,0) \in \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ şi $(0,0,\gamma) \in \{(x,0,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$, dar

$$\{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x,0,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

2.4.12 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathbb{R}^2 = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Rezolvare. Orice vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ admite reprezentarea

$$(x,y) = (x,x) + (0,y-x)$$

cu $(x,x) \in \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ şi $(0,y-x) \in \{(0,\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. În plus

$$\{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cap \{(0,\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \{(0,0)\}.$$

2.4.13 Exerciţiu. Să se arate că

$$\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\} \oplus \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$$

unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.

Indicaţie. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ admite reprezentarea

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

cu ${}^t(A + {}^tA) = A + {}^tA$ şi ${}^t(A - {}^tA) = -(A - {}^tA)$.

2.4.14 Am definit suma a două spaţii vectoriale în cazul în care ambele sunt subspaţii ale unui spaţiu vectorial dat. Ea poate fi privită ca o sumă directă *interioară*. Suma directă a două spaţii vectoriale se poate însă defini în cazul a două spaţii vectoriale peste acelaşi corp, arbitrare ca o sumă *exterioară*.

2.4.15 Propoziţie. *Dacă $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ sunt două spaţii peste acelaşi corp $\mathbb{K}$, atunci*

$$\mathcal{V} \times \mathcal{W} = \{\ (x, y) \mid\ \ x \in \mathcal{V},\ \ \ y \in \mathcal{W}\ \},$$

considerat împreună cu adunarea

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

şi înmulţirea cu scalari

$$\alpha(x, y) = (\alpha x,\ \alpha y)$$

este un spaţiu vectorial, notat cu $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, şi

$$\dim(\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W}.$$

Demonstraţie. Dacă $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ şi $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ sunt baze în $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$, atunci

$$\{\ (v_1, 0), (v_2, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), (0, w_2), ..., (0, w_k)\ \}$$

este bază în $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

2.4.16 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$.

Spaţiul vectorial

$$\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \stackrel{\text{def}}{=} \{\ (x, y) \mid\ \ x \in \mathcal{V},\ \ \ y \in \mathcal{W}\ \}$$

este numit *suma directă* a spaţiilor $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$.

2.4.17 Spaţiile $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ pot fi identificate respectiv cu subspaţiile

$$\{\ (x, 0) \mid x \in \mathcal{V}\ \}, \qquad \{\ (0, y) \mid y \in \mathcal{W}\ \}$$

ale spaţiului $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, şi avem

$$\{\ (x, 0) \mid x \in \mathcal{V}\ \} \cap \{\ (0, y) \mid y \in \mathcal{W}\ \} = \{(0, 0)\},$$
$$\{\ (x, 0) \mid x \in \mathcal{V}\ \} + \{\ (0, y) \mid y \in \mathcal{W}\ \} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}.$$

2.4.18 Exemplu. Avem $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, ...

2.5 Produs tensorial de spaţii vectoriale

2.5.1 Pentru a defini produsul tensorial a două spaţii vectoriale este preferabil ca spaţiile să fie privite ca spaţii de funcţii.
Un spaţiu vectorial $\mathcal{V}$ peste $\mathbb{K}$ se poate identifica cu bidualul

$$\mathcal{V} \equiv (\mathcal{V}^*)^* = \{\, f : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este formă liniară} \,\}$$

asociind fiecărui vector $x \in \mathcal{V}$ forma liniară

$$x : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} : \ \varphi \mapsto \varphi(x).$$

Această identificare are avantajul că nu presupune alegerea unei baze.
Alegând o bază $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ şi asociind fiecărui vector $x = x^i v_i$ funcţia

$$x : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad x(i) = x^i,$$

obţinem identificarea

$$\mathcal{V} \equiv \{\, f : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este funcţie} \,\}.$$

2.5.2 Forma liniară

$$x : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} : \ \varphi \mapsto \varphi(x)$$

este complet determinată de valorile luate pe baza duală $\{v^1, v^2, ..., v^n\}$:

$$v^1(x) = x^1, \quad v^2(x) = x^2, \ \ldots \ , \quad v^n(x) = x^n.$$

Astfel, reprezentările alternative

$$x : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{şi} \qquad x : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

ale unui vector $x \in \mathcal{V}$ se pot obţine una din cealaltă.

2.5.3 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$. O aplicaţie

$$\Phi : \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

este numită *formă biliniară* dacă

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi, \eta) = \alpha\Phi(\varphi, \eta) + \beta\Phi(\psi, \eta),$$
$$\Phi(\varphi, \alpha\eta + \beta\mu) = \alpha\Phi(\varphi, \eta) + \beta\Phi(\varphi, \mu),$$

oricare ar fi $\varphi, \psi \in \mathcal{V}^*$, $\eta, \mu \in \mathcal{W}^*$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

2.5.4 Produsul tensorial a doi vectori $x\in\mathcal{V}$ şi $y\in\mathcal{W}$, identificaţi cu formele liniare

$$x:\mathcal{V}^*\longrightarrow\mathbb{K}:\ \varphi\mapsto\varphi(x)\qquad\text{şi}\qquad y:\mathcal{W}^*\longrightarrow\mathbb{K}:\ \psi\mapsto\psi(y)$$

este forma biliniară

$$x\otimes y:\mathcal{V}^*\times\mathcal{W}^*\longrightarrow\mathbb{K},\qquad (x\otimes y)(\varphi,\psi)=\varphi(x)\,\psi(y)$$

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}&(x+y)\otimes z=x\otimes z+y\otimes z,\qquad &&\forall x,y\in\mathcal{V},\qquad \forall z\in\mathcal{W};\\ &x\otimes(y+z)=x\otimes y+x\otimes z,\qquad &&\forall x\in\mathcal{V},\quad \forall y,z\in\mathcal{W};\\ &(\alpha x)\otimes y=x\otimes(\alpha y)=\alpha\,x\otimes y,\qquad &&\forall x\in\mathcal{V},\qquad \forall y\in\mathcal{W},\quad \forall\alpha\in\mathbb{K}.\end{aligned}$$

2.5.5 Definiţie. Utilizând identificările $\mathcal{V}\equiv(\mathcal{V}^*)^*$ şi $\mathcal{W}\equiv(\mathcal{W}^*)^*$, *produsul tensorial* al spaţiilor vectoriale $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ se defineşte ca fiind spaţiul vectorial

$$\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}=\{\ \Phi:\mathcal{V}^*\times\mathcal{W}^*\longrightarrow\mathbb{K}\mid\Phi\ \text{ este formă biliniară}\ \}$$

al tuturor formelor biliniare $\Phi:\mathcal{V}^*\times\mathcal{W}^*\longrightarrow\mathbb{K}$.

2.5.6 Teoremă *Fie $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$. Dacă*

$\{v_1,v_2,...,v_n\}$ *este bază în $\mathcal{V}$ şi*

$\{w_1,w_2,...,w_m\}$ *este bază în $\mathcal{W}$,*

atunci

$$\{\ v_i\otimes w_j\ \mid\ i\in\{1,2,...,n\},\quad j\in\{1,2,...,m\}\ \}$$

este bază în $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$, şi prin urmare,

$$\dim\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}=\dim\mathcal{V}\cdot\dim\mathcal{W}.$$

Demonstraţie. Dacă $\Phi:\mathcal{V}^*\times\mathcal{W}^*\to\mathbb{K}$ este o formă biliniară, atunci

$$\Phi(\varphi,\psi)=\Phi(\varphi(v_i)v^i,\psi(w_j)w^j)=\Phi(v^i,w^j)\,\varphi(v_i)\,\psi(w_j)=\Phi(v^i,w^j)\,v_i\otimes w_j\,(\varphi,\psi)$$

oricare ar fi $\varphi\in\mathcal{V}^*$ şi $\psi\in\mathcal{W}^*$, adică avem

$$\Phi=\Phi^{ij}v_i\otimes w_j\qquad\text{unde}\quad\Phi^{ij}=\Phi(v^i,w^j)$$

Dacă numerele $\alpha^{ij}\in\mathbb{K}$ sunt astfel încât

$$\alpha^{ij}\,v_i\otimes w_j=0,\qquad\text{adică}\qquad\alpha^{ij}\,v_i\otimes w_j\,(\varphi,\psi)=0$$

pentru orice $\varphi\in\mathcal{V}^*$ şi $\psi\in\mathcal{W}^*$, atunci alegând $\varphi=v^k$ şi $\psi=w^\ell$ obţinem relaţia

$$\alpha^{ij}\,v_i\otimes w_j\,(v^k,w^\ell)=0,\qquad\text{adică}\qquad\alpha^{ij}\,v^k(v_i)\,w^\ell(w_j)=0.$$

Deoarece $v^k(v_i)=\delta_i^k$ şi $w^\ell(w_j)=\delta_j^\ell$, obţinem $\alpha^{ij}=0$, oricare ar fi i, j.

2.5.7 O formă biliniară

$$\Phi : \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

este complet determinată de numerele $\Phi^{ij} = \Phi(v^i, w^j)$, adică de funcţia

$$\Phi : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad \Phi(i, j) = \Phi^{ij}.$$

Deoarece $v^i(x) = x^i$ şi $w^j(y) = y^j$, formei biliniare

$$x \otimes y : \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (x \otimes y)(\varphi, \psi) = \varphi(x)\, \psi(y)$$

îi corespunde funcţia

$$x \otimes y : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (x \otimes y)(i, j) = x^i\, y^j,$$

adică funcţia

$$x \otimes y : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (x \otimes y)(i, j) = x(i)\, y(j),$$

şi are loc relaţia

$$(x \otimes y)^{ij} = x^i\, y^j.$$

2.5.8 Utilizând identificările

$$\mathcal{V} \equiv \{\, f : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este funcţie} \,\},$$
$$\mathcal{W} \equiv \{\, g : \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid g \text{ este funcţie} \,\},$$

produsul tensorial al spaţiilor $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ se defineşte ca fiind spaţiul vectorial

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \{\, \Phi : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \Phi \text{ este funcţie} \,\}$$

al tuturor funcţiilor de forma $\Phi : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\} \longrightarrow \mathbb{K}$.

2.5.9 În unele aplicaţii în mecanica cuantică se preferă pentru baze indexările $\{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$, $\{w_0, w_1, ..., w_{m-1}\}$ care conduc la identificările

$$\mathcal{V} \equiv \{\, f : \{0, 1, ..., n-1\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este funcţie} \,\},$$
$$\mathcal{W} \equiv \{\, g : \{0, 1, ..., m-1\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid g \text{ este funcţie} \,\},$$

şi prin urmare la

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \{\, \Phi : \{0, 1, ..., n-1\} \times \{0, 1, ..., m-1\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \Phi \text{ este funcţie} \,\}.$$

2.5.10 Dacă reprezentăm spaţiile $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ ca spaţii de polinoame

$$\mathcal{V} \equiv \{\alpha_0+\alpha_1 X+\cdots+\alpha_{n-1}X^{n-1} \mid \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\in\mathbb{K}\},$$
$$\mathcal{W} \equiv \{\beta_0+\beta_1 Y+\cdots+\beta_{m-1}Y^{m-1} \mid \beta_0, \beta_1, ..., \beta_{m-1}\in\mathbb{K}\},$$

atunci produsul lor tensorial este spaţiul vectorial

$$\mathcal{V}\otimes\mathcal{W} = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{ij}X^iY^j \;\middle|\; \gamma_{ij}\in\mathbb{K} \right\}$$

al polinoamelor de grad cel mult $n-1$ în raport cu X şi $m-1$ în raport cu Y.
În aceast caz, produsul tensorial a doi vectori

$$(\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1}) \otimes (\beta_0 + \beta_1 Y + \cdots + \beta_{m-1}Y^{m-1})$$

este produsul uzual

$$(\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1})(\beta_0 + \beta_1 Y + \cdots + \beta_{m-1}Y^{m-1})$$

al celor două polinoame.
Sistemele $\{1, X, ..., X^{n-1}\}$ şi $\{1, Y, ..., Y^{m-1}\}$ sunt baze în $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$, iar

$$\{\, X^iY^j \mid i\in\{0,1,...,n-1\},\ j\in\{0,1,...,m-1\} \,\}$$

este bază în $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$.

2.5.11 În $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ există elemente care nu sunt de forma $x\otimes y$.
De exemplu, în cazul $\mathcal{V}=\mathcal{W}=\mathbb{C}^2$, elementul

$$v_1\otimes v_2+v_2\otimes v_1 \qquad \text{cu} \qquad \begin{array}{l} v_1 = (1,0), \\ v_2 = (0,1), \end{array}$$

aparţine spaţiului $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$, dar nu există

$$\begin{array}{l} x = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ y = \gamma v_1 + \delta v_2 \end{array} \qquad \text{cu} \qquad v_1\otimes v_2+v_2\otimes v_1 = x\otimes y,$$

deoarece $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ar trebui să satisfacă relaţiile contradictorii

$$\begin{array}{l} \alpha\gamma = 0 = \beta\delta, \\ \alpha\delta = 1 = \beta\gamma. \end{array}$$

2.5.12* **Definiţie**. Spunem că $\Phi\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ este *separabil* (*unentangled*, în engleză) dacă există $x\in\mathcal{V}$ şi $y\in\mathcal{W}$ astfel încât $\Phi=x\otimes y$.
În cazul opus, spunem că Φ este *neseparabil* (*entangled*, în engleză).

2.5.13 Alegând o bază $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ în $\mathcal{V}$ şi o bază $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ în $\mathcal{W}$, produsul tensorial $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ se poate descrie ca fiind format din toate combinaţiile liniare

$$\Phi = \sum_{i,j} \Phi^{ij} v_i \otimes w_j \qquad \text{cu} \qquad \Phi^{ij} \in \mathbb{K}.$$

Deoarece Φ se mai poate scrie

$$\Phi = \sum_j (\sum_i \Phi^{ij} v_i) \otimes w_j = \sum_i v_i \otimes (\sum_j \Phi^{ij} w_j)$$

rezultă că orice element din $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ este o sumă de elemente separabile

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \left\{ \sum_i x_i \otimes y_i \;\middle|\; x_i \in \mathcal{V},\ y_i \in \mathcal{W} \right\}.$$

Fiecărui element $\Phi = \Phi^{ij} v_i \otimes w_j$ i se poate asocia în mod natural matricea

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \dots & \Phi^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n1} & \dots & \Phi^{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

2.5.14 Deoarece

$$\left.\begin{array}{l} x = x^i v_i \\ y = y^j w_j \end{array}\right\} \implies x \otimes y = x^i\, y^j\, v_i \otimes w_j,$$

matricea asociată produsului $x \otimes y$ este matricea de rangul 1

$$\begin{pmatrix} x^1 y^1 & x^1 y^2 & \dots & x^1 y^m \\ x^2 y^1 & x^2 y^2 & \dots & x^2 y^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n y^1 & x^n y^2 & \dots & x^n y^m \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, orice matrice de rangul 1 are această formă (v. pag. 50-**47**). Un element Φ este separabil dacă şi numai dacă matricea Φ are rangul 1.

2.5.15 Matricea Φ asociată unui element $\Phi \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ depinde de bazele alese, dar $\operatorname{rang} \Phi$ este independent de această alegere.

În cazul în care este mai mare decât 1, numărul întreg

$$\operatorname{rang} \Phi = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \dots & \Phi^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n1} & \dots & \Phi^{nm} \end{pmatrix},$$

numit *rangul Schmidt*, este o măsură a gradului de inseparabilitate al lui $\Phi = \Phi^{ij}\, v_i \otimes w_j$. El are o utilizare limitată deoarece $\operatorname{rang}: \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{N}$ nu este funcţie continuă.

2.5.16 Fiecare bază $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ a unui spaţiu vectorial $\mathcal{V}$ (cu vectorii într-o ordine fixată) defineşte o reprezentare matriceală pentru elementele lui $\mathcal{V}$

$$x = x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n \quad \mapsto \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = {}^t(x^1 \quad x^2 \quad \cdots \quad x^n).$$

În cazul produsului tensorial $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, alegând ordinea lexicografică

$$v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, ..., v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2, ..., v_2 \otimes w_m, ..., v_n \otimes w_m$$

pentru elementele bazei, putem asocia lui

$$\Phi = \Phi^{11} v_1 \otimes w_1 + \cdots + \Phi^{1m} v_1 \otimes w_m + \Phi^{21} v_2 \otimes w_1 + \cdots + \Phi^{nm} v_n \otimes w_m$$

matricea coloană

$$\Phi = {}^t(\Phi^{11} \;\; \Phi^{12} \;\; \ldots \;\; \Phi^{1m} \;\; \Phi^{21} \;\; \Phi^{22} \;\; \ldots \;\; \Phi^{2m} \;\; \ldots \;\; \Phi^{n1} \;\; \Phi^{n2} \;\; \ldots \;\; \Phi^{nm}).$$

Matricea lui $x \otimes y$ este produsul tensorial al matricelor corespunzătoare lui x şi y. De exemplu, în reprezentare matriceală, relaţia

$$\begin{aligned}(x^1 v_1 + x^2 v_2) \otimes (y^1 w_1 + y^2 w_2) \; &= x^1 y^1 v_1 \otimes w_1 + x^1 y^2 v_1 \otimes w_2 \\ &\quad + x^2 y^1 v_2 \otimes w_1 + x^2 y^2 v_2 \otimes w_2\end{aligned}$$

devine

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 y^1 \\ x^1 y^2 \\ x^2 y^1 \\ x^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

2.5.17 Am prezentat două reprezentări matriceale pentru elementele lui $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. De exemplu, $\Phi = \Phi^{11} v_1 \otimes w_1 + \Phi^{12} v_1 \otimes w_2 + \Phi^{21} v_2 \otimes w_1 + \Phi^{22} v_2 \otimes w_2$ admite reprezentările matriceale

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \Phi^{12} \\ \Phi^{21} & \Phi^{22} \end{pmatrix} \qquad \text{şi} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{11} \\ \Phi^{12} \\ \Phi^{21} \\ \Phi^{22} \end{pmatrix}.$$

2.5.18 Definiţie. Fie $A:\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}$ şi $B:\mathcal{W}\longrightarrow\mathcal{W}$ doi operatori liniari. Deoarece orice element $\Phi\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ este sumă de elemente de forma $x\otimes y$, relaţia

$$(A\otimes B)\,(x\otimes y)=(Ax)\otimes(By)$$

defineşte operatorul liniar $A\otimes B:\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}\longrightarrow\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$,

$$(A\otimes B)\sum_i x_i\otimes y_i=\sum_i(Ax_i)\otimes(By_i),$$

numit *produsul tensorial* al operatorilor A şi B.

2.5.19 Din relaţia

$$\begin{aligned}((A\otimes B)(x\otimes y))(\varphi,\psi)&=((Ax)\otimes(By))(\varphi,\psi)\\&=\varphi(Ax)\,\psi(By)=(x\otimes y)(\varphi\circ A,\psi\circ B)\end{aligned}$$

rezultă că

$$((A\otimes B)\Phi)(\varphi,\psi)=\Phi(\varphi\circ A,\psi\circ B),$$

oricare ar fi $\Phi=\sum_i x_i\otimes y_i\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$.

2.5.20 Propoziţie. *Dacă $A,C\in\mathcal{L}(\mathcal{V})$ şi $B,D\in\mathcal{L}(\mathcal{W})$, atunci*

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD).$$

Demonstraţie. Egalitatea are loc pentru orice vector de forma $x\otimes y$ din $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$

$$\begin{aligned}(A\otimes B)(C\otimes D)(x\otimes y)&=(A\otimes B)\,(Cx)\otimes(Dy)\\&=(ACx)\otimes(BDy)=(AC)\otimes(BD)(x\otimes y).\end{aligned}$$

2.5.21 Fie $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ bază în $\mathcal{V}$ şi $\{w_1,w_2,...,w_m\}$ bază în $\mathcal{W}$.
Matricea operatorului liniar $T:\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}\longrightarrow\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ este

$$T=\left(T^{ij}_{k\ell}\right)_{1\le i,k\le n,\,1\le j,\ell\le m},$$

cu elementele

$$T^{ij}_{k\ell}=(v^i\otimes w^j)(T(v_k\otimes w_\ell))$$

satisfăcând relaţia

$$T(v_k\otimes w_\ell)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}T^{ij}_{k\ell}\,v_i\otimes w_j.$$

2.5.22 Propoziţie. *Dacă $A\in\mathcal{L}(\mathcal{V})$ şi $B\in\mathcal{L}(\mathcal{W})$, atunci matricea lui $A\otimes B$ este produsul tensorial al matricelor corespunzătoare lui A şi B.*

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bază în $\mathcal{V}$ şi $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ bază în $\mathcal{W}$. Matricele lui A şi B sunt

$$A = \left(A_k^i\right)_{1\le i,k\le n} \qquad \text{cu} \quad Av_k = A_k^i\, v_i, \quad \text{adică} \quad A_k^i = v^i(Av_k),$$

$$B = \left(B_\ell^j\right)_{1\le j,\ell\le m} \qquad \text{cu} \quad Bw_\ell = B_\ell^j\, w_j, \quad \text{adică} \quad B_\ell^j = v^j(Bv_\ell).$$

Avem

$$(A\otimes B)(v_k\otimes w_\ell) = (Av_k)\otimes(Bw_\ell) = A_k^i\, B_\ell^j\, v_i\otimes w_j = (A\otimes B)_{k\ell}^{ij}\, v_i\otimes w_j,$$

unde

$$(A\otimes B)_{k\ell}^{ij} = A_k^i\, B_\ell^j.$$

2.5.23 Dacă $A\in\mathcal{L}(\mathcal{V})$ şi $B\in\mathcal{L}(\mathcal{W})$, din relaţia

$$\begin{aligned}(A\otimes B)\Phi &= (A\otimes B)(\Phi^{k\ell}v_k\otimes w_\ell) = \Phi^{k\ell}(Av_k)\otimes(Bw_\ell)\\ &= \Phi^{k\ell}A_k^iB_\ell^jv_i\otimes w_j = (A\otimes B)_{k\ell}^{ij}\Phi^{k\ell}v_i\otimes w_j\end{aligned}$$

rezultă că

$$((A\otimes B)\Phi)^{ij} = (A\otimes B)_{k\ell}^{ij}\,\Phi^{k\ell}.$$

2.5.24 În cazul

$$x=\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\end{pmatrix}, \qquad y=\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1\\ A_1^2 & A_2^2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1\\ B_1^2 & B_2^2\end{pmatrix},$$

obţinem

$$(A\otimes B)(x\otimes y) = \begin{pmatrix} A_1^1B_1^1 & A_1^1B_2^1 & A_2^1B_1^1 & A_2^1B_2^1\\ A_1^1B_1^2 & A_1^1B_2^2 & A_2^1B_1^2 & A_2^1B_2^2\\ A_1^2B_1^1 & A_1^2B_2^1 & A_2^2B_1^1 & A_2^2B_2^1\\ A_1^2B_1^2 & A_1^2B_2^2 & A_2^2B_1^2 & A_2^2B_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1y^1\\ x^1y^2\\ x^2y^1\\ x^2y^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^1x^1 + A_2^1x^2\\ A_1^2x^1 + A_2^2x^2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} B_1^1y^1 + B_2^1y^2\\ B_1^2y^1 + B_2^2y^2\end{pmatrix} = (Ax)\otimes(By).$$

2.6 Tensori pe un spaţiu vectorial

2.6.1 Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, două baze

$$\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \qquad \text{(baza } \textit{veche}\text{)},$$
$$\mathfrak{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\} \qquad \text{(baza } \textit{nouă}\text{)},$$

dualele lor

$$\mathfrak{B}^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\}, \qquad \mathfrak{B}'^* = \{e'^1, e'^2, ..., e'^n\},$$

şi matricele de trecere

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix},$$

unde

$$e'_i = \alpha_i^j \, e_j \qquad \text{şi} \qquad e_j = \beta_j^i \, e'_i. \tag{2.16}$$

Fiecare vector $x \in \mathcal{V}$ poate fi reprezentat în $\mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{B}'$

$$x = x^i \, e_i = x'^j \, e'_j \qquad \text{cu} \qquad \begin{array}{l} x^i = e^i(x), \\ x'^j = e'^j(x), \end{array}$$

şi avem

$$x'^i = \beta_j^i \, x^j.$$

Similar, fiecare formă liniară $\varphi \in \mathcal{V}^*$ poate fi reprezentată în $\mathfrak{B}^*$ şi $\mathfrak{B}'^*$

$$\varphi = \varphi_i \, e^i = \varphi'_j \, e'^j \qquad \text{cu} \qquad \begin{array}{l} \varphi_i = \varphi(e_i), \\ \varphi'_j = \varphi(e'_j), \end{array}$$

şi avem

$$\varphi'_i = \alpha_i^j \, \varphi_j.$$

2.6.2 Dacă $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, atunci asociind fiecărui $x \in \mathcal{V}$ forma liniară (v. pag. 82-**11**)

$$x : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad x(\varphi) = \varphi(x),$$

obţinem un izomorfism $\mathcal{V} \longrightarrow (\mathcal{V}^*)^*$ care permite identificarea lui $\mathcal{V}$ cu $(\mathcal{V}^*)^*$. De aceea, plecând de la definiţia

$$\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}=\{\ T:\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}^*\longrightarrow\mathbb{K}\mid T\ \text{ este formă biliniară }\},$$

obţinem

$$\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}^*=\{\ T:\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{K}\mid T\ \text{ este formă biliniară }\},$$
$$\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{V}^*=\{\ T:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{K}\mid T\ \text{ este formă biliniară }\}.$$

2.6.3 Fiecare element $T\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ admite reprezentările

$$T=T^{ij}\,e_i\otimes e_j=T'^{k\ell}\,e'_k\otimes e'_\ell\qquad\text{cu}\qquad\begin{array}{l}T^{ij}=T(e^i,e^j),\\ T'^{k\ell}=T(e'^k,e'^\ell),\end{array}$$

şi avem

$$T'^{k\ell}=\beta_i^k\beta_j^\ell\,T^{ij}.$$

Fiecare element $T\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}^*$ admite reprezentările

$$T=T^i_j\,e_i\otimes e^j=T'^{\,k}_{\ell}\,e'_k\otimes e'^\ell\qquad\text{cu}\qquad\begin{array}{l}T^i_j=T(e^i,e_j),\\ T'^{\,k}_{\ell}=T(e'^k,e'_\ell),\end{array}$$

şi avem

$$T'^{\,k}_{\ell}=\beta_i^k\alpha_\ell^j\,T^i_j.$$

Fiecare element $T\in\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{V}^*$ admite reprezentările

$$T=T_{ij}\,e^i\otimes e^j=T'_{k\ell}\,e'^k\otimes e'^\ell\qquad\text{cu}\qquad\begin{array}{l}T_{ij}=T(e_i,e_j),\\ T'_{k\ell}=T(e'_k,e'_\ell),\end{array}$$

şi avem

$$T'_{k\ell}=\alpha_k^i\alpha_\ell^j\,T_{ij}.$$

2.6.4 Definiţie. Un *tensor* de tip (p,q), adică de p ori contravariant şi q ori covariant, pe un spaţiu vectorial $\mathcal{V}$ este un obiect matematic T descris în fiecare bază a lui $\mathcal{V}$ de $(\dim\mathcal{V})^{p+q}$ coordonate

$$T^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}$$

care la o schimbare de bază (2.16) se transformă conform relaţiei

$$T'^{\,i_1i_2\ldots i_p}_{\;\;j_1j_2\ldots j_q}=\beta^{i_1}_{k_1}\,\beta^{i_2}_{k_2}\,\cdots\,\beta^{i_p}_{k_p}\alpha^{m_1}_{j_1}\,\alpha^{m_2}_{j_2}\,\cdots\,\alpha^{m_q}_{j_q}\,T^{k_1k_2\ldots k_p}_{m_1m_2\ldots m_q}.$$

2.6.5 Un tensor este complet determinat de coordonatele lui într-o bază fixată. Dacă se cunosc coordonatele unui tensor într-o bază, atunci pot fi calculate coordonatele lui în oricare altă bază.

2.6.6 Exemple.

Elementele lui $\mathcal{V}$ sunt tensori de tipul $(1,0)$.
Elementele lui $\mathcal{V}^*$ sunt tensori de tipul $(0,1)$.
Elementele lui $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ sunt tensori de tipul $(2,0)$.
Elementele lui $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}^*$ sunt tensori de tipul $(1,1)$.
Elementele lui $\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{V}^*$ sunt tensori de tipul $(0,2)$.
Numerele din $\mathbb{K}$ pot fi privite ca tensori de tip $(0,0)$.

2.6.7 Exerciţiu. Obiectul matematic ale cărui coordonatele în orice bază sunt

$$T^i_j=\delta^i_j=\begin{cases}1 & \text{dacă} \quad i=j,\\ 0 & \text{dacă} \quad i\neq j\end{cases}$$

este un tensor de tipul $(1,1)$.

Rezolvare. Avem $T'^i_{\ j}=\delta^i_j=\beta^i_k\alpha^k_j=\beta^i_k\alpha^m_j\delta^k_m=\beta^i_k\alpha^m_jT^k_m$.

2.6.8 Propoziţie *Orice operator liniar $A:\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}$ este un tensor de tipul $(1,1)$. Coordonatele lui A într-o bază $\mathfrak{B}=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ sunt coeficienţii din dezvoltarea*

$$Ae_i=A^j_i\,e_j.$$

Demonstraţie. Din $Ae'_i=A'^j_{\ i}\,e'_j$ obţinem relaţia $A(\alpha^k_i\,e_k)=A'^j_{\ i}\alpha^m_je_m$,
care poate fi scrisă sub forma

$$\alpha^k_i\,Ae_k=\alpha^m_j\,A'^j_{\ i}\,e_m$$

şi conduce la $\alpha^k_i\,A^m_k\,e_m=\alpha^m_j\,A'^j_{\ i}\,e_m$, adică $\alpha^k_i\,A^m_k=\alpha^m_j\,A'^j_{\ i}$. Din acestă formulă obţinem relaţia $\beta^s_m\,\alpha^k_i\,A^m_k=\beta^s_m\,\alpha^m_j\,A'^j_{\ i}$, echivalentă cu

$$A'^s_{\ i}=\beta^s_m\,\alpha^k_i\,A^m_k,$$

deoarece $\beta^s_m\alpha^m_j\,A'^j_{\ i}=\delta^s_j\,A'^j_{\ i}=A'^s_{\ i}$.

2.6.9 Teoremă. *Orice aplicaţie $(p+q)$-liniară*

$$T:\underbrace{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}^*\times\cdots\times\mathcal{V}^*}_{p\text{ ori}}\times\underbrace{\mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\cdots\times\mathcal{V}}_{q\text{ ori}}\longrightarrow\mathbb{K}$$

este un tensor de tipul (p,q) ale cărui coordonate în baza $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ sunt

$$T^{i_1i_2...i_p}_{j_1j_2...j_q}=T(e^{i_1},e^{i_2},...,e^{i_p},e_{j_1},e_{j_2},...,e_{j_q}).$$

Mai mult, orice tensor de tipul (p,q) corespunde unei aplicaţii $(p+q)$-liniare şi numai uneia.

Demonstraţie. (în cazul particular $p=q=1$). Avem

$$T'^{k}_{\ell}=T(e'^{k},e'_{\ell})=T(\beta^{k}_{i}\,e^{i},\alpha^{j}_{\ell}\,e_{j})=\beta^{k}_{i}\,\alpha^{j}_{\ell}\,T(e^{i},e_{j})=\beta^{k}_{i}\,\alpha^{j}_{\ell}\,T^{i}_{j}.$$

Invers, utilizând coordonatele T^{i}_{j} într-o bază fixată, putem defini aplicaţia biliniară

$$T:\mathcal{V}^{*}\times\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{K},\qquad T(\varphi,x)=T(\varphi_{i}\,e^{i},\,x^{j}\,e_{j})=T^{i}_{j}\,\varphi_{i}\,x^{j},$$

independent de baza aleasă

$$\begin{aligned}T(\varphi'_{k}\,e'^{k},\,x'^{\ell}\,e'_{\ell})&=T'^{k}_{\ell}\,\varphi'_{k}\,x'^{\ell}=\beta^{k}_{a}\,\alpha^{b}_{\ell}\,T^{a}_{b}\,\alpha^{i}_{k}\,\varphi_{i}\,\beta^{\ell}_{j}\,x^{j}\\&=\delta^{i}_{a}\,\delta^{b}_{j}\,T^{a}_{b}\,\varphi_{i}\,x^{j}=T^{i}_{j}\,\varphi_{i}\,x^{j}.\end{aligned}$$

2.6.10 Propoziţie (Suma a doi tensori).

Dacă $A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}$ şi $B^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}$ sunt coordonatele a doi tensori A şi B de tip (p,q), atunci

$$T^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}=A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}+B^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip (p,q), notat cu $A+B$, adică

$$(A+B)^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}=A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}+B^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}.$$

Demonstraţie. (cazul $p=q=1$). Avem

$$T'^{i}_{\ j}=A'^{i}_{\ j}+B'^{i}_{\ j}=\beta^{i}_{k}\,\alpha^{m}_{j}\,A^{k}_{m}+\beta^{i}_{k}\,\alpha^{m}_{j}\,B^{k}_{m}=\beta^{i}_{k}\,\alpha^{m}_{j}\,(A^{k}_{m}+B^{k}_{m})=\beta^{i}_{k}\,\alpha^{m}_{j}\,T^{k}_{m}.$$

2.6.11 Propoziţie (Înmulţirea unui tensor cu un scalar).

Dacă $\lambda\in\mathbb{K}$ şi $A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}$ sunt coordonatele unui tensor A de tip (p,q), atunci

$$T^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}=\lambda A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip (p,q), notat cu λA, adică

$$(\lambda A)^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}=\lambda A^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}.$$

Demonstraţie. (cazul $p=q=1$). Avem $T'^{i}_{\ j}=\lambda A'^{i}_{\ j}=\lambda\beta^{i}_{k}\,\alpha^{m}_{j}\,A^{k}_{m}=\beta^{i}_{k}\,\alpha^{m}_{j}\,T^{k}_{m}$.

2.6.12 Propoziţie (Produsul tensorial a doi tensori, într-un caz particular).

Dacă A^{i}_{jk} sunt coordonatele unui tensor A de tip $(1,2)$ şi B^{l}_{m} sunt coordonatele unui tensor B de tip $(1,1)$, atunci

$$T^{il}_{jkm} = A^i_{jk} \cdot B^l_m$$

sunt coordonatele unui tensor de tip $(2,3)$*, notat cu* $A \otimes B$*, adică*

$$(A \otimes B)^{il}_{jkm} = A^i_{jk} \cdot B^l_m.$$

Demonstraţie. Avem

$$T'^{il}_{\ jkm} = A'^{i}_{\ jk} \cdot B'^{l}_{\ m} = \beta^i_a\, \alpha^b_j\, \alpha^c_k\, A^a_{bc}\ \beta^l_r\, \alpha^s_m\, B^r_s = \beta^i_a\, \beta^l_r\, \alpha^b_j\, \alpha^c_k\, \alpha^s_m\, T^{ar}_{bcs}.$$

Generalizarea definiţiei produsului tensorial este imediată.

2.6.13 Produsul $x \otimes \varphi$ dintre un vector $x \in V$ si o 1-formă $\varphi \in V^*$ are coordonatele

$$(x \otimes \varphi)^i_j = x^i\, \varphi_j,$$

iar produsul tensorial $x \otimes y$ a doi vectori coordonatele

$$(x \otimes y)^{ij} = x^i\, y^j.$$

2.6.14 Propoziţie (Contracţia unui tensor, într-un caz particular).
Fie A^{ij}_{klm} *coordonatele unui tensor* A *de tip* $(2,3)$*. Numerele*

$$T^j_{km} = \sum_{i=1}^{n} A^{ij}_{kim}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip $(1,2)$*, obţinut prin contracţia lui* A *în raport cu primul indice de contravarianţă şi al doilea indice de covarianţă.*

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} T'^{j}_{\ km} &= \textstyle\sum_{i=1}^n A'^{ij}_{\ kim} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \beta^i_a \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^d_i \alpha^r_m A^{ab}_{cdr} = \left(\sum_{i=1}^n \beta^i_a \alpha^d_i\right) \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m A^{ab}_{cdr} = \delta^d_a \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m A^{ab}_{cdr} \\ &= \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m \left(\delta^d_a A^{ab}_{cdr}\right) = \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m \left(\textstyle\sum_{a=1}^n A^{ab}_{car}\right) = \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m T^b_{cr}. \end{aligned}$$

2.6.15 Operaţia de contracţie se poate face în raport cu orice pereche de indici formată dintr-un indice superior şi un indice inferior.

2.6.16 Exerciţiu. Să se arate că dacă $x \in \mathcal{V}$ şi $\varphi \in \mathcal{V}^*$, atunci numărul

$$\gamma = x^i \varphi_i$$

este un tensor de tip $(0,0)$, numit *scalar.*

Rezolvare. Numărul γ se obţine prin contracţie din $x \otimes \varphi$ şi nu depinde de baza aleasă

$$\gamma' = \sum_{i=1}^{n} x'^i \varphi'_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_j^i \alpha_i^k x^j \varphi_k = \delta_j^k x^j \varphi_k = x^j \varphi_j = \gamma.$$

Capitolul 3

Spaţii Hilbert finit-dimensionale

3.1 Spaţii cu produs scalar

3.1.1 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu vectorial real (un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$).

Un *produs scalar* pe $\mathcal{H}$ este o aplicaţie

$$\langle , \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

care satisface următoarele trei condiţii:

$a)$ $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}$ şi $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

$b)$ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$;

$c)$ $\langle x, x \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathcal{H}$ şi
$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

3.1.2 Exemplu. Relaţia

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = x_1 \, y_1 + \cdots + x_n \, y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k$$

defineşte un produs scalar pe spaţiul $\mathbb{R}^n$, oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3, ...\}$.

3.1.3 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu vectorial complex (un spaţiu vectorial peste $\mathbb{C}$).

Un *produs scalar* pe $\mathcal{H}$ este o aplicaţie

$$\langle , \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

care satisface următoarele trei condiţii:

$a)$ $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}$ şi $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
$b)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$;
$c)$ $\langle x, x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathcal{H}$ şi
$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$

3.1.4 Exemplu. Relaţia

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\rangle = \bar{x}_1\, y_1 + \cdots + \bar{x}_n\, y_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k\, y_k$$

defineşte un produs scalar pe spaţiul $\mathbb{C}^n$, oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3, ...\}$.

3.1.5 În cazul unui spaţiu vectorial complex cu produs scalar

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \overline{\langle z, \alpha x + \beta y\rangle} = \bar{\alpha}\ \overline{\langle z, x\rangle} + \bar{\beta}\ \overline{\langle z, y\rangle} = \bar{\alpha}\langle x, z\rangle + \bar{\beta}\langle y, z\rangle.$$

3.1.6 Definiţie. Spunem despre doi vectori că sunt *coliniari* dacă unul dintre ei se poate obţine înmulţindu-l pe celălalt cu un scalar.

3.1.7 Teoremă (Cauchy-Schwarz).

a) Dacă $\langle , \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ *este produs scalar, atunci*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\, \langle y, y\rangle,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathcal{H}$.

b) Egalitatea

$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\, \langle y, y\rangle$$

are loc dacă şi numai dacă x *şi* y *sunt coliniari.*

Demonstraţie. a) Relaţia are, evident, loc în cazul $y = 0$. Dacă $y \neq 0$, atunci

$$\langle x + \lambda y,\, x + \lambda y\rangle \geq 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

adică

$$\langle x, x\rangle + \bar{\lambda}\langle y, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle \geq 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Alegând

$$\lambda = -\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

relaţia devine

$$\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \geq 0,$$

adică $\langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle \geq |\langle x,y\rangle|^2$.

b) Dacă $x=\alpha y$, atunci

$$|\langle \alpha y,y\rangle|^2 = \langle \alpha y,\alpha y\rangle\,\langle y,y\rangle, \qquad \text{adică} \qquad |\langle x,y\rangle|^2 = \langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle.$$

Pentru $y\neq 0$, avem

$$x=\alpha y \quad \Rightarrow \quad \langle y,x\rangle = \langle y,\alpha y\rangle = \alpha\langle y,y\rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}.$$

Dacă $y\neq 0$ şi $|\langle x,y\rangle|^2 = \langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle$, atunci

$$\left\| x - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}y \right\|^2 = \left\langle x - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}y,\, x - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}y \right\rangle = 0$$

şi prin urmare avem

$$x - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}y = 0,$$

adică

$$x = \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}y.$$

3.1.8 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$.

Prin *normă* pe $\mathcal{H}$ se înţelege o aplicaţie

$$||\ ||\,:\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{R}$$

cu proprietăţile:

a) $\|x\|\geq 0$ oricare ar fi $x\in\mathcal{H}$ şi $\|x\|=0 \iff x=0$;

b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, oricare ar fi $\alpha\in\mathbb{K},\ x\in\mathcal{H}$;

c) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, oricare ar fi $x,y\in\mathcal{H}$.

3.1.9 Propoziţie. *Dacă* $\langle\,,\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{K}$ *este produs scalar, atunci*

$$||\cdot||:\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad ||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

este normă (numită *norma asociată* produsului scalar).

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
||x|| &= \sqrt{\langle x,x\rangle}\geq 0 \quad \text{şi} \quad ||x||=0 \Longleftrightarrow x=0;\\
||\alpha x|| &= \sqrt{\langle \alpha x,\alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\bar\alpha\langle x,x\rangle} = |\alpha|\ ||x||;\\
||x+y||^2 &= \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\\
&= ||x||^2 + 2\,\mathfrak{Re}\,\langle x,y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2\,|\mathfrak{Re}\,\langle x,y\rangle| + ||y||^2\\
&\leq ||x||^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2\\
&= (||x|| + ||y||)^2
\end{aligned}$$

deoarece

$$|\mathfrak{Re}\,(a+\mathrm{i}b)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |a+\mathrm{i}b|.$$

3.1.10 Produsul scalar este complet determinat de norma asociată.

În cazul unui spaţiu vectorial real

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x-y||^2), \qquad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

iar în cazul unui spaţiu vectorial complex

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 - \mathrm{i}||x+\mathrm{i}y||^2 + \mathrm{i}||x-\mathrm{i}y||^2), \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.1.11 Inegalitatea Cauchy-Schwarz se poate scrie sub forma

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||.$$

3.1.12 **Exemplu**. Pe spaţiul vectorial real

$$\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \}$$

unde

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2),$$
$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

relaţia

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

defineşte un produs scalar. Numărul

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

adică

$$||(x_1, x_2)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

reprezintă *lungimea* vectorului $x = (x_1, x_2)$.

3.1.13 În $\mathbb{R}^2$, utilizând formula

$$\cos(a-b) = \cos a\, \cos b + \sin a\, \sin b$$

obtinem relaţia (a se vedea figura 3.2)

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 &= ||x||\,||y||\,(\cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b)\\ &= ||x||\,||y||\,\cos(a-b)\end{aligned}$$

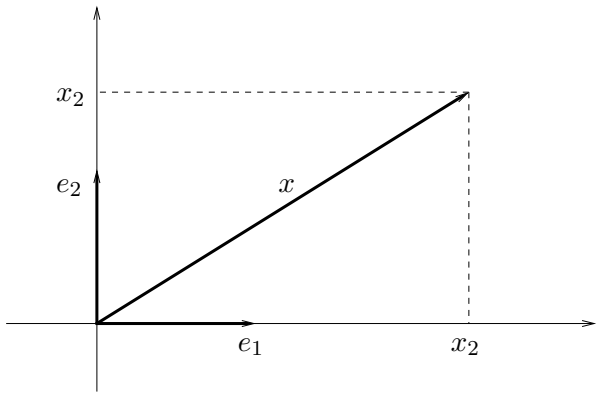

Figura 3.1: Lungimea vectorului $x=(x_1, x_2)$ din $\mathbb{R}^2$.

din care rezultă că produsul scalar $\langle x, y\rangle$ a doi vectori x şi y este egal cu produsul lungimilor vectorilor înmulţit cu cosinusul unghiului dintre ei. În particular, vectorii sunt *ortogonali* (perpendiculari) dacă şi numai dacă

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

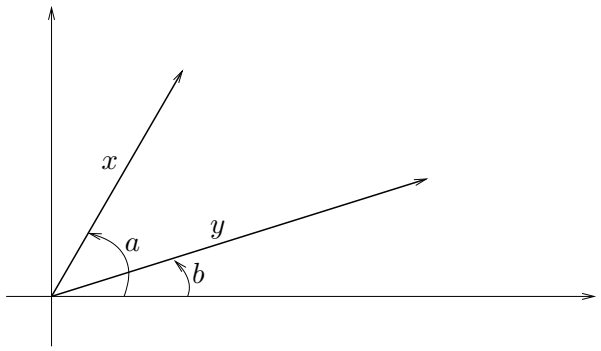

Figura 3.2: Produsul scalar a doi vectori din $\mathbb{R}^2$.

3.1.14 Plecând de la produsul scalar a doi vectori nenuli calculat în două feluri

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,\cos\alpha,$$

putem deduce sinusul unghiului format de ei

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{(x_1\,x_2+y_1\,y_2)^2}{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}} = \frac{|x_1\,y_2-x_2\,y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

şi apoi aria paralelogramului determinat de cei doi vectori

$$aria = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}\,\sin\alpha = \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|.$$

3.1.15 Exemplu. Pe spaţiul vectorial complex

$$\mathbb{C}^2 = \{x=(x_1,x_2) \mid \ x_1,x_2\in\mathbb{C}\ \}$$

unde

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2),$$
$$\alpha(x_1,x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

relaţia

$$\langle x,y\rangle = \bar{x}_1\,y_1 + \bar{x}_2\,y_2$$

defineşte un produs scalar. Numărul

$$||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle},$$

adică

$$||(x_1,x_2)|| = \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}$$

reprezintă *lungimea* vectorului $x=(x_1,x_2)$.

3.1.16 Definiţie Prin *distanţă* pe o mulţime $M\neq\emptyset$ se înţelege o aplicaţie

$$d: M\times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietăţile:

a) $d(x,y)\geq 0$ oricare ar fi $x,y\in M$ şi
$d(x,y)=0 \iff x=y$;

b) $d(x,y)=d(y,x)$, oricare ar fi $x,y\in M$;

c) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$, oricare ar fi $x,y,z\in M$.

3.1.17 Propoziţie. *Dacă* $\langle,\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{K}$ *este produs scalar, atunci*

$$d:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad d(x,y)=||x-y||=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$$

este distanţă.

Demonstraţie. Avem

$d(x,y) = \| x-y \| \geq 0$ şi $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \| x-y \|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$;
$d(x,y) = \| x-y \| = \| (-1)(y-x) \| = |-1| \, \| y-x \| = \| y-x \| = d(y,x)$;
$d(x,y) = \| x-y \| = \| x-z+z-y \| \leq \| x-z \| + \| z-y \| = d(x,z)+d(z,y)$.

3.1.18 Definiţie.

Un spaţiu vectorial echipat cu o normă este numit *spaţiu vectorial normat*.
O mulţime nevidă echipată cu o distanţă este numită *spaţiu metric*.

3.1.19 Orice spaţiu cu produs scalar are şi o structură de spaţiu vectorial normat.
Orice spaţiu normat are şi o structură naturală de spaţiu metric.

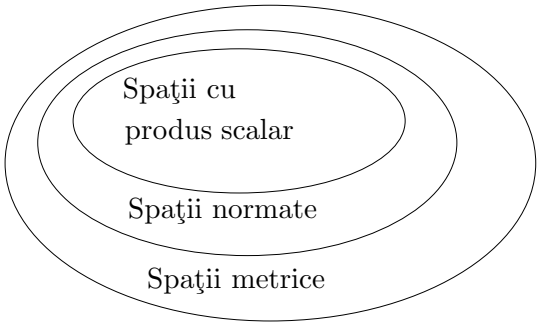

Figura 3.3: Spaţii metrice.

3.1.20 MATHEMATICA: `EuclideanDistance[{a, b, c}, {x, y, z}]`

```
In[1]:=EuclideanDistance[{a, b, c}, {x, y, z}]
                    ↦Out[1]=Sqrt[Abs[a-x]^2+Abs[b-y]^2+Abs[c-z]^2]
In[2]:=EuclideanDistance[{1,2,3}, {4,5,6}]    ↦  Out[2]=3Sqrt[3]
```

3.2 Baze ortonormate

3.2.1 Definiţie. Un *vector unitar* sau *versor* este un vector x cu $||x|| = 1$.

3.2.2 Utilizând norma corespunzătoare, inegalitatea Cauchy-Schwarz se poate scrie

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y||.$$

În cazul unui spaţiu vectorial real cu produs scalar, dacă $x \neq 0$ şi $y \neq 0$, atunci

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||} \leq 1.$$

Numărul $\varphi \in [0, \pi]$ cu proprietatea

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

reprezintă *unghiul* dintre x şi y. Relaţia precedentă se mai poate scrie

$$\langle x, y\rangle = ||x||\ ||y||\ \cos\varphi.$$

3.2.3 MATHEMATICA: `VectorAngle[u,v]`

```
In[1]:=VectorAngle[{1, 2}, {2, -1}]        ↦  Out[1]=π/2
In[2]:=VectorAngle[{1, 1, 0}, {1, 1, 1}]   ↦  Out[2]=ArcCos[Sqrt[2/3]]
```

3.2.4 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu cu produs scalar şi $M \subseteq \mathcal{H}$ o submulţime.
Spunem că vectorii $x, y \in \mathcal{H}$ sunt *ortogonali* şi scriem $x \perp y$ dacă $\langle x, y\rangle = 0$.
Spunem că $x \in \mathcal{H}$ este *ortogonal* pe M şi scriem $x \perp M$ dacă $x \perp y,\ \forall y \in M$.

3.2.5 Dacă vectorii $x, y \in \mathcal{H}$ sunt ortogonali, atunci

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2,$$

adică

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

3.2.6 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu cu produs scalar şi $\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset \mathcal{H}$.
Spunem că $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ este un *system ortogonal* dacă

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0 \qquad \text{în cazul } \ i \neq j.$$

Spunem că $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ este un *system ortonormat* dacă

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{în cazul } \ i = j, \\ 0 & \text{în cazul } \ i \neq j. \end{cases}$$

3.2.7 Versorul corespunzător vectorului $x = (1, 2, 3)$ este

$$\frac{1}{\sqrt{\langle x, x\rangle}}\, x = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(1, 2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

3.2.8 MATHEMATICA: `Normalize[x]`

```
In[1]:=Normalize[{1, 2, 3}]   ↦  Out[1]=(1/Sqrt[14], Sqrt[2/7], 3/Sqrt[14])
```

3.2.9 Propoziţie. *Orice sistem ortogonal de vectori nenuli este liniar independent.*

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un sistem ortogonal de vectori nenuli. Dacă

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0,$$

atunci

$$0 = \langle v_1, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle + \cdots + \alpha_k \langle v_1, v_k \rangle = \alpha_1 \, ||v_1||^2.$$

Deoarece $v_1 \neq 0$, obţinem $\alpha_1 = 0$. Similar, se poate deduce că $\alpha_2 = 0$, ... , $\alpha_k = 0$.

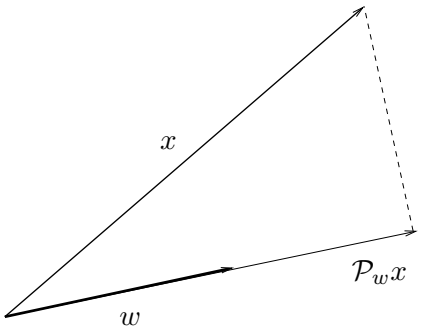

Figura 3.4: Proiecţia ortogonală lui x pe w.

3.2.10 Propoziţie. *Proiecţia ortogonală a lui x pe $w \neq 0$ este*

$$\mathcal{P}_w x = \frac{\langle w, x \rangle}{\langle w, w \rangle} \, w.$$

Demonstraţie. Proiecţia ortogonală a lui x pe w este un vector de forma λw. Impunând condiţia $(x - \lambda w) \perp w$, obţinem relaţia $\langle w, x - \lambda w \rangle = 0$ care conduce la $\lambda = \langle w, x \rangle / \langle w, w \rangle$ (v. Fig. 3.4).

3.2.11 Dacă $||w|| = 1$, atunci proiecţia lui x pe w este vectorul $\mathcal{P}_w x = \langle w, x \rangle \, w$.

3.2.12 Proiecţia ortogonală a vectorului $x = (1, 2, 3)$ pe $w = (1, 1, 1)$ este

$$\mathcal{P}_{(1,1,1)}(1, 2, 3) = \frac{\langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle} \, (1, 1, 1) = (2, 2, 2).$$

3.2.13 MATHEMATICA: `Projection[x, w]`

```
In[1]:=Projection[{1, 2, 3}, {1, 1, 1}]  ↦  Out[1]=(2,2,2)
```

3.2.14 Teoremă (Metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt).
Dacă sistemul $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *este liniar independent, atunci* $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$, *unde*

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1, \\ w_2 &= u_2 - \tfrac{\langle w_1, u_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n &= u_n - \tfrac{\langle w_1, u_n\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \tfrac{\langle w_2, u_n\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 - \cdots - \tfrac{\langle w_{n-1}, u_n\rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1}\rangle} w_{n-1}, \end{aligned}$$

este un sistem ortonormat astfel încât

$$\operatorname{span}\{w_1,\, w_2,\, \ldots,\, w_k\} = \operatorname{span}\{u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_k\}$$

oricare ar fi $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demonstraţie. Avem

$$\langle w_2, w_1\rangle = \left\langle u_2 - \frac{\langle w_1, u_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1,\, w_1 \right\rangle = \langle u_2, w_1\rangle - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \langle w_1, w_1\rangle = 0.$$

Similar, se poate arăta că orice vector w_k este ortogonal pe $w_1,\, w_2,\, \ldots\, ,\, w_{k-1}$.

3.2.15 Teoremă (Metoda de ortonormalizare Gram-Schmidt).
Dacă sistemul $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *este liniar independent, atunci* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, *unde*

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{u_1}{||u_1||}, \\ v_2 &= \tfrac{u_2 - \langle v_1, u_2\rangle\, v_1}{||u_2 - \langle v_1, u_2\rangle\, v_1||}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= \tfrac{u_n - \langle v_1, u_n\rangle\, v_1 - \langle v_2, u_n\rangle\, v_2 - \cdots - \langle v_{n-1}, u_n\rangle\, v_{n-1}}{||u_n - \langle v_1, u_n\rangle\, v_1 - \langle v_2, u_n\rangle\, v_2 - \cdots - \langle v_{n-1}, u_n\rangle\, v_{n-1}||}, \end{aligned}$$

este un sistem ortonormat astfel încât

$$\operatorname{span}\{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_k\} = \operatorname{span}\{u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_k\}$$

oricare ar fi $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demonstraţie. Se poate verifica direct că $v_2 \perp v_1$, apoi $v_3 \perp v_1$ şi $v_3 \perp v_2$, etc.

3.2.16 Ortonormalizând sistemul de vectori

$$\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

obţinem sistemul ortonormat

$$\left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 1) \right\}.$$

3.2.17 MATHEMATICA: `Orthogonalize[{u1,u2,...,un}]`

`In[1]:=Orthogonalize[{{1, 1, 0}, {1, 1, 1}}]` $\mapsto$ Out[1]=$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\},\{0,0,1\}\right\}$

3.2.18 Definiţie. O *bază ortonormată* este o bază $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ cu proprietatea

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij},$$

adică o bază formată din versori ortogonali.

3.2.19 Cu ajutorul metodei de ortonormalizare Gram-Schmidt, din orice bază se poate obţine una ortonormată.

3.2.20 Teoremă *Dacă* $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *este o bază ortonormată, atunci*

$$x = \sum_{i=1}^{n}\langle v_i, x\rangle v_i$$

şi

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, v_i\rangle\,\langle v_i, y\rangle, \qquad ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\langle v_i, x\rangle|^2}$$

oricare ar fi vectorii x *şi* y.

Demonstraţie. Orice vector $x \in V$ se poate scrie ca o combinaţie liniară

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i$$

şi avem

$$\langle v_k, x\rangle = \left\langle v_k, \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\langle v_k, v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\delta_{ik} = x_k$$

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle v_i, x\rangle v_i,\ y\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, v_i\rangle\,\langle v_i, y\rangle$$

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, v_i\rangle\,\langle v_i, x\rangle = \sum_{i=1}^{n}|\langle x, v_i\rangle|^2.$$

3.2.21 Exemplu. Sistemul $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1e_1 + x_2e_2\\ &= \langle(1,0),(x_1,x_2)\rangle e_1 + \langle(0,1),(x_1,x_2)\rangle e_2\\ &= \langle e_1, x\rangle e_1 + \langle e_2, x\rangle e_2.\end{aligned}$$

3.2.22 Exerciţiu. Să se arate că $\left\{e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{R}^2$ şi să se scrie vectorul $x=(2,3)$ ca o combinaţie liniară de e_1' şi e_2'.

Rezolvare. Avem

$$\langle e_1', e_1'\rangle = \langle e_2', e_2'\rangle = 1, \qquad \langle e_1', e_2'\rangle = \langle e_2', e_1'\rangle = 0$$

şi

$$x = \langle e_1', x\rangle e_1' + \langle e_2', x\rangle e_2' = \tfrac{5}{\sqrt{2}} e_1' - \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_2'.$$

3.2.23*[1] **Definiţie**. În spaţiul $\mathbb{C}^d$, considerat cu produsul scalar standard, despre două baze

$$\{v_1, v_2, ..., v_d\} \qquad \text{şi} \qquad \{w_1, w_2, ..., w_d\}$$

spunem că sunt *complementare* (*unbiased*,în engleză) dacă

$$|\langle v_j, w_k\rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}, \qquad \text{oricare ar fi} \quad j,k \in \{1,2,...,d\}.$$

3.2.24* În $\mathbb{C}^2$, oricare două dintre bazele ortonormate

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_0 &= \{(1,0),(0,1,)\}, \\
\mathfrak{B}_1 &= \left\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}, \\
\mathfrak{B}_2 &= \left\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\mathrm{i}), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-\mathrm{i})\right\}
\end{aligned}$$

sunt baze complementare.

3.2.25* În $\mathbb{C}^3$, oricare două dintre bazele ortonormate

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_0 &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \\
\mathfrak{B}_1 &= \left\{\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\varepsilon,\varepsilon^2\right), \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\varepsilon^2,\varepsilon\right)\right\}, \\
\mathfrak{B}_2 &= \left\{\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\varepsilon,\varepsilon\right), \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\varepsilon^2,1\right), \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,1,\varepsilon^2\right)\right\}, \\
\mathfrak{B}_3 &= \left\{\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\varepsilon^2,\varepsilon^2\right), \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\varepsilon,1\right), \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,1,\varepsilon\right)\right\},
\end{aligned}$$

unde $\varepsilon = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$, sunt baze complementare.

3.2.26* În $\mathbb{C}^4$, oricare două dintre bazele ortonormate

[1] Paragrafele marcate cu * pot fi omise la o primă lectură.

$$\mathfrak{B}_0 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\},$$
$$\mathfrak{B}_1 = \left\{\tfrac{1}{2}(1,1,1,1),\tfrac{1}{2}(1,1,-1,-1),\tfrac{1}{2}(1,-1,-1,1),\tfrac{1}{2}(1,-1,1,-1)\right\},$$
$$\mathfrak{B}_2 = \left\{\tfrac{1}{2}(1,-1,-\mathrm{i},-\mathrm{i}),\tfrac{1}{2}(1,-1,\mathrm{i},\mathrm{i}),\tfrac{1}{2}(1,1,\mathrm{i},-\mathrm{i}),\tfrac{1}{2}(1,1,-\mathrm{i},\mathrm{i})\right\},$$
$$\mathfrak{B}_3 = \left\{\tfrac{1}{2}(1,-\mathrm{i}-,\mathrm{i},-1),\tfrac{1}{2}(1,-\mathrm{i},\mathrm{i},1),\tfrac{1}{2}(1,\mathrm{i},\mathrm{i},-1),\tfrac{1}{2}(1,\mathrm{i},-\mathrm{i},1)\right\},$$
$$\mathfrak{B}_4 = \left\{\tfrac{1}{2}(1,-\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}),\tfrac{1}{2}(1,-\mathrm{i},1,\mathrm{i}),\tfrac{1}{2}(1,\mathrm{i},-1,\mathrm{i}),\tfrac{1}{2}(1,\mathrm{i},1,-\mathrm{i})\right\}$$

sunt baze complementare.

3.2.27 Propoziţie. *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu cu produs scalar şi $M \subset \mathcal{H}$ o submulţime. Mulţimea tuturor vectorilor ortogonali pe M*

$$M^{\perp} = \{\, x \in V \mid \ x \perp u, \quad \forall u \in M\}$$

este un subspaţiu vectorial.

Demonstraţie. Oricare ar fi $x \in M$, avem

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in M^{\perp} \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \implies \langle u, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle u, x\rangle + \beta\langle u, y\rangle = 0,$$

şi prin urmare $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$.

3.2.28 Teoremă. *Dacă $\mathcal{H}$ este un spaţiu cu produs scalar şi $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un subspaţiu vectorial, atunci*

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp}.$$

Demonstraţie. Dacă $x \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^{\perp}$, atunci $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$, şi prin urmare $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^{\perp} = \{0\}$. Este suficient să arătaăm că dim $\mathcal{K}$+dim $\mathcal{K}^{\perp}$=dim $\mathcal{H}$. Pornim de la o bază ortonormată $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ a lui $\mathcal{K}$ şi o extindem până la o bază $\{v_1, v_2, ..., v_k, u_1, u_2, ..., u_{n-k}\}$ a lui $\mathcal{H}$. Din ea obţinem prin ortonormalizare o bază $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\}$ în $\mathcal{H}$. Se poate observa imediat că $\{v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\}$ este bază în $\mathcal{K}^{\perp}$ şi prin urmare $\dim \mathcal{K} + \dim \mathcal{K}^{\perp} = \dim \mathcal{H}$.

3.3 Dualul unui spaţiu cu produs scalar

3.3.1 Propoziţie. *În cazul unui spaţiu cu produs scalar $\mathcal{H}$ avem*

$$\begin{array}{r}\langle x,u\rangle=\langle y,u\rangle,\\ \forall u\in\mathcal{H}\end{array} \quad \Longrightarrow \quad x=y\,.$$

Demonstraţie. Alegând $u=x-y$, obţinem

$$\langle x,x-y\rangle=\langle y,x-y\rangle \implies \langle x-y,x-y\rangle=0 \implies ||x-y||=0 \implies x=y.$$

3.3.2 Teoremă. *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu cu produs scalar. Pentru orice formă liniară*

$$\varphi:\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}$$

există $a\in\mathcal{H}$, unic determinat, astfel încât

$$\varphi(x)=\langle a,x\rangle, \qquad \textit{oricare ar fi } \ x\in\mathcal{H}.$$

Demonstraţie. Fie $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ o bază ortonormată. Din relaţia

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}x_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\varphi(v_i)=\left\langle\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi(v_j)}\,v_j,\sum_{i=1}^{n}x_iv_i\right\rangle$$

rezultă că

$$a=\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi(v_j)}\,v_j$$

satisface condiţia impusă, iar din propoziţia precedentă, rezultă că a este unic.

3.3.3 Din unicitatea lui a rezultă că vectorul $\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi(v_j)}\,v_j$, definit utilizând o bază, nu depinde de baza aleasă.

3.3.4 În cazul unui spaţiu cu produs scalar $\mathcal{H}$, avem

$$\mathcal{H}^*=\{\ \mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}:x\mapsto\langle a,x\rangle\ \mid\ a\in\mathcal{H}\ \}.$$

3.3.5 Notaţia lui Dirac. În cazul $\mathcal{H}=\mathbb{C}^n$, produsul scalar a doi vectori

$$a=(a_1,a_2,...,a_n) \qquad \text{şi} \qquad b=(b_1,b_2,...,b_n)$$

poate fi scris utilizând înmulţirea matricelor sub forma

$$\langle a,b\rangle=\bar{a}_1\,b_1+\bar{a}_2\,b_2+...+\bar{a}_n\,b_n=\begin{pmatrix}\bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Utilizând notaţiile

$$\langle a| = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \qquad \text{şi} \qquad |b\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

obţinem o notaţie alternativă pentru produsul scalar

$$\langle a, b\rangle = \langle a|b\rangle.$$

Pentru forma liniară

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \langle a, x\rangle,$$

adică

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \ |x\rangle \mapsto \langle a|x\rangle,$$

se utilizează notaţia $\langle a|$. Aplicaţia

$$|b\rangle\langle a| : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n : |x\rangle \mapsto |b\rangle\langle a|x\rangle$$

este un operator liniar cu matricea asociată

$$|b\rangle\langle a| = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\bar{a}_1 & b_1\bar{a}_2 & \cdots & b_1\bar{a}_n \\ b_2\bar{a}_1 & b_2\bar{a}_2 & \cdots & b_2\bar{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n\bar{a}_1 & b_n\bar{a}_2 & \cdots & b_n\bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

3.3.6 În cazul unui spaţiu Hilbert oarecare $\mathcal{H}$, este uneori convenabil să se utilizeze notaţia $|a\rangle$ pentru vectorii $a \in \mathcal{H}$ şi $\langle a|$ pentru formele liniare asociate

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \ |x\rangle \mapsto \langle a|x\rangle.$$

3.3.7 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este o bază ortonormată, atunci (v. pag. 113-**20**)

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, x\rangle v_i, \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in \mathcal{H}.$$

Utilizând notaţia lui Dirac, această relaţie se poate scrie

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i|x\rangle \, |v_i\rangle, \qquad \text{oricare ar fi} \quad |x\rangle \in \mathcal{H},$$

sau

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i|x\rangle, \qquad \text{oricare ar fi} \quad |x\rangle \in \mathcal{H}. \tag{3.1}$$

Utilizând operatorul identitate

$$I : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad I|x\rangle = |x\rangle,$$

relaţia (3.1) se poate scrie sub forma

$$I = \sum_{i=1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i|. \tag{3.2}$$

Relaţia (3.2) reprezintă *rezoluţia identităţii* asociată bazei $\mathfrak{B}$.

3.3.8 Relaţia (3.2) corespunde, în cazul bazei canonice

$$\mathfrak{B} = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1)\}$$

a lui $\mathbb{R}^3$, egalităţii

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ \ 0 \ \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ \ 1 \ \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ \ 0 \ \ 1).$$

3.3.9 Definiţia proiecţiei ortogonale pe un vector unitar w

$$\mathcal{P}_w x = \langle w, x\rangle\, w$$

se poate scrie sub forma

$$\mathcal{P}_w|x\rangle = |w\rangle\langle w|x\rangle$$

şi prin urmare,

$$\mathcal{P}_w = |w\rangle\langle w|.$$

3.3.10 Exerciţiu. Dacă w este un vector unitar, atunci

$$\operatorname{tr} |w\rangle\langle w| = 1.$$

Soluţie. Dacă $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ este bază ortonoirmată, atunci

$$\operatorname{tr} |w\rangle\langle w| = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i|w\rangle\langle w|v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle w|v_i\rangle\langle v_i|w\rangle = \langle w|I|w\rangle = \langle w|w\rangle = 1.$$

3.3.11 Dacă $\mathfrak{B} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ este o bază ortonormată, atunci $\{\langle v_1|, \langle v_2|, \ldots, \langle v_n|\}$ este duala ei deoarece

$$\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}.$$

În particular, din (3.2) rezultă relaţia

$$\langle a| = \sum_{i=1}^{n} \langle a|v_i\rangle\langle v_i|.$$

3.3.12 Un sistem de vectori $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ este bază ortonormată dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiţii:

$$\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}; \qquad \sum_{i=1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i| = I.$$

3.3.13 În spaţiul bidimensional

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \; |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \; \right\},$$

echipat cu produsul scalar

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\beta}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\beta}_1\beta_2,$$

fiecare dintre sistemele de vectori (am indicat diverse notaţii utilizate)

$$\left\{ |0\rangle \equiv |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |1\rangle \equiv |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ |+\rangle \equiv |\nearrow\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; |-\rangle \equiv |\searrow\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ |\oplus\rangle \equiv |s\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \; |\ominus\rangle \equiv |t\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}$$

este bază ortonormată. Ele sunt numite *baza computaţională, baza diagonală şi baza circulară*. În aplicaţii, unele notaţii pot fi mai sugestive decât altele.

3.3.14* Exerciţiu. Arătaţi că în $\mathbb{C}^2$, oricare două dintre bazele $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, $\{|\oplus\rangle, |\ominus\rangle\}$ sunt baze complementare (v. pag. 114-**23**).

3.3.15 Teoremă.

Matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice unitară.

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ şi $\{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ două baze ortonormate şi fie

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad S^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \cdots & \bar{\alpha}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{1n} & \cdots & \bar{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea de trecere între ele şi adjuncta ei, adică

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i.$$

Din relaţia

$$\delta_{ij} = \langle v'_i, v'_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} v_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{mj} v_m \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{mj} \langle v_k, v_m \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{mj} \delta_{km} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{kj}$$

rezultă că $S^*S = I$.

3.3.16 În cazul unui spaţiu vectorial real cu produs scalar, matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice ortogonală.

3.4 Frame-uri exacte

3.4.1 În $\mathbb{R}^2$ vectorii corespunzători varfurilor unui triunghi echilateral

$$w_0 = \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 0\right), \qquad w_1 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad w_2 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

nu formează o bază ortonormată, dar verifică relaţia remarcabilă

$$I = \sum_{i=0}^{2} |w_i\rangle\langle w_i|,$$

adică, în scriere matriceală,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Versorii corespunzători vectorilor w_i,

$$u_i = \tfrac{1}{||w_i||}\, w_i,$$

adică vectorii (v. Fig. 3.5),

$$u_0 = (1, 0), \qquad u_1 = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad u_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

verifică relaţia

$$I = \tfrac{2}{3} \sum_{i=0}^{2} |u_i\rangle\langle u_i|.$$

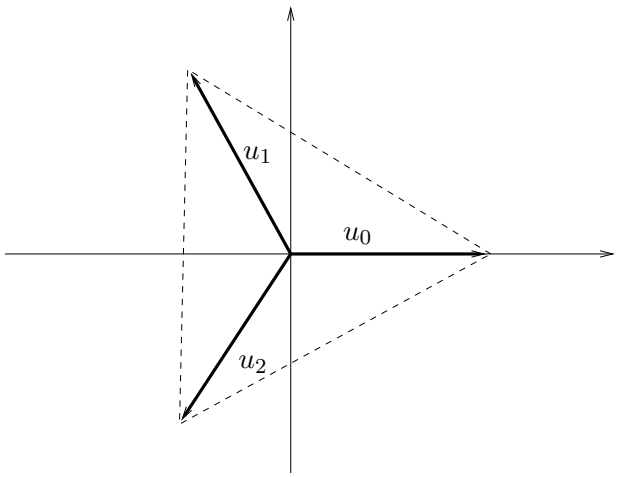

Figura 3.5: Frame-ul finit u_0, u_1, u_2.

3.4.2* Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu d-dimensional cu produs scalar. Un sistem de vectori unitari $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ este numit *frame* dacă există două constante $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ astfel încât

$$\alpha|\langle x|x\rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} |\langle x|u_i\rangle|^2 \leq \beta|\langle x|x\rangle|^2, \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in \mathcal{H}.$$

Sistemul de vectori $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ este numit *frame exact* dacă există $0 < \alpha < \infty$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x|u_i\rangle|^2 = \alpha|\langle x|x\rangle|^2, \qquad \text{oricare ar fi} \quad x \in \mathcal{H}.$$

3.4.3* Teoremă. *Într-un spaţiu complex d-dimensional cu produs scalar $\mathcal{H}$, orice frame exact $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ verifică rezoluţia identităţii*

$$I = \frac{d}{k} \sum_{i=1}^{k} |u_i\rangle\langle u_i|. \tag{3.3}$$

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_d\}$ o bază ortonormată în $\mathcal{H}$ şi

$$S = \frac{d}{k} \sum_{i=1}^{k} |u_i\rangle\langle u_i|.$$

Din relaţia

$$\alpha d = \alpha \sum_{j=1}^{d} |\langle v_j|v_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{k} |\langle v_j|u_i\rangle|^2 = k$$

rezultă că $\alpha = k/d$. Avem

$$\langle v_j|S|v_j\rangle = \frac{d}{k}\sum_{i=1}^{k}\langle v_j|u_i\rangle\langle u_i|v_j\rangle = \frac{d}{k}\sum_{i=1}^{k}|\langle v_j|u_i\rangle|^2 = |\langle v_j|v_j\rangle|^2 = 1.$$

Oricare ar fi $j \neq \ell$, au loc relaţiile

$$2 = \langle v_j+v_\ell|v_j+v_\ell\rangle = \langle v_j+v_\ell|S|v_j+v_\ell\rangle = 2 + \langle v_j|S|v_\ell\rangle + \langle v_\ell|S|v_j\rangle,$$

$$2 = \langle v_j+\mathrm{i}v_\ell|v_j+\mathrm{i}v_\ell\rangle = \langle v_j+\mathrm{i}v_\ell|S|v_j+\mathrm{i}v_\ell\rangle = 2 + \mathrm{i}\langle v_j|S|v_\ell\rangle - \mathrm{i}\langle v_\ell|S|v_j\rangle,$$

care conduc la $\langle v_j|S|v_\ell\rangle = 0$.

3.4.4* Vom utiliza termenul de *frame exact* pentru a desemna orice sistem de vectori unitari $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ care satisface rezoluţia identităţii (3.3). În particular, orice bază ortonormată este un frame exact.

3.4.5* **Teoremă**. *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu d-dimensional cu produs scalar. Dacă $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ este un frame exact, atunci*

$$|x\rangle = \tfrac{d}{k}\sum_{i=1}^{k}|u_i\rangle\langle u_i|x\rangle, \qquad \langle x| = \tfrac{d}{k}\sum_{i=1}^{k}\langle x|u_i\rangle\langle u_i|,$$

$$\langle x|y\rangle = \tfrac{d}{k}\sum_{i=1}^{k}\langle x|u_i\rangle\langle u_i|y\rangle, \qquad ||x||^2 = \tfrac{d}{k}\sum_{i=1}^{k}|\langle x|u_i\rangle|^2,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathcal{H}$.

Demonstraţie. Toate relaţiile rezultă direct din (3.3).

3.4.6* **Exerciţiu**. Vectorii corespunzători vârfurilor unui tetraedru regulat

$$u_1 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad u_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$u_3 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad u_4 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

formează un frame exact în $\mathbb{R}^3$.

3.4.7* **Exerciţiu**. Vectorii corespunzători vârfurilor unui icosaedru regulat

$$\tfrac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(1, \tau, 0), \qquad \tfrac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(-1, \tau, 0),$$

$$\tfrac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(\tau, 0, 1), \qquad \tfrac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(\tau, 0, -1),$$

$$\tfrac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(0, 1, \tau), \qquad \tfrac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(0, -1, \tau)$$

definit utilizând 'numărul de aur' $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$, formează un frame exact în $\mathbb{R}^3$.

3.4.8* Exerciţiu.

Vectorii corespunzători varfirilor unui poligon regulat cu k laturi

$$u_m = \left(\cos\tfrac{2m\pi}{k}, \sin\tfrac{2m\pi}{k}\right), \qquad \text{unde} \quad m = 0, 1, ..., k-1,$$

formează un frame exact în $\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$I = \tfrac{2}{k} \sum_{m=0}^{k-1} |u_m\rangle\langle u_m|.$$

3.4.9* Exerciţiu. Sistemul infinit de vectori

$$u(t) = (\cos t, \sin t), \qquad \text{unde} \quad t \in [0, 2\pi),$$

formează un frame exact infinit în $\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt \; |u(t)\rangle\langle u(t)|.$$

3.4.10* Exerciţiu. În spaţiul $L^2(\mathbb{R})$, sistemul infinit de vectori

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{z^n}{\sqrt{n!}} \, |n\rangle, \qquad \text{unde} \quad z \in \mathbb{C},$$

definit utilizând o bază ortonormată $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, ...\}$, formează un frame exact infinit astfel încât

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d\mathfrak{Re}\, z \, d\mathfrak{Im}\, z \, |z\rangle\langle z|.$$

Scriind $|q, p\rangle$ în loc de $|z\rangle = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(q - \mathrm{i}p)\right\rangle$, relaţia anterioară devine

$$I = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} dq \, dp \, |q, p\rangle\langle q, p|.$$

Frame-ul infinit $|z\rangle_{z\in\mathbb{C}}$, numit *sistemul de stări coerente standard* sau *sistemul de stări coerente Schrödinger-Klauder-Glauber*, joacă un rol fundamental în mecanica cuantică, optică şi, în general, în modelele cuantice din fizică [14, 28].

3.5 Spaţii Hilbert

3.5.1 Orice spaţiu cu produs scalar are o structură de spaţiu normat cu norma

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

şi o structură de spaţiu metric, cu distanţa definită prin relaţia

$$d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}.$$

3.5.2 O consecinţă directă a relaţiei $||u||^2 = \langle u, u\rangle$ este *identitatea paralelogramului*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2.$$

3.5.3 Definiţie. Fie $(x_k)_{k\geq 0}$ un şir de elemente din spaţiul cu produs scalar $\mathcal{H}$. Spunem că $(x_k)_{k\geq 0}$ *converge* la a şi scriem $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ dacă

$$\lim_{k\to\infty} ||x_k - a|| = 0,$$

adică dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$||x_k - a|| < \varepsilon, \qquad \text{oricare ar fi} \quad k \geq k_\varepsilon.$$

3.5.4 Definiţie. Fie $(x_k)_{k\geq 0}$ un şir de elemente din spaţiul cu produs scalar $\mathcal{H}$. Spunem că $(x_k)_{k\geq 0}$ este *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$||x_k - x_\ell|| < \varepsilon, \qquad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} k \geq k_\varepsilon, \\ \ell \geq k_\varepsilon. \end{array}$$

3.5.5 Propoziţie. *Orice şir convergent este un şir Cauchy.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, atunci există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$||x_k - a|| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{oricare ar fi} \quad k \geq k_\varepsilon,$$

şi prin urmare

$$||x_k - x_\ell|| = ||x_k - a + a - x_\ell|| \leq ||x_k - a|| + ||x_\ell - a|| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $k \geq k_\varepsilon$ şi $\ell \geq k_\varepsilon$.

3.5.6 Definiţie.

Un spaţiu metric este *complet* dacă orice şir Cauchy este convergent.

Un spaţiu normat complet este numit *spaţiu Banach*.

Un spaţiu cu produs scalar complet este numit *spaţiu Hilbert*.

3.5.7 *Convenţie.* În funcţie de corpul peste care este spaţiul vectorial, spaţiul Hilbert este un *spaţiu Hilbert real* sau un *spaţiu Hilbert complex.*
În afară de cazul în care se indică contrariul, prin *spaţiu Hilbert* vom înţelege în continuare un spaţiu Hilbert complex.

3.5.8 Exemple. Fie $n \in \{1, 2, 3, ...\}$.
Spaţiul $\mathbb{R}^n$ echipat cu produsul scalar

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$$

este un spaţiu Hilbert real de dimensiune n.
Spaţiul $\mathbb{C}^n$ echipat cu produsul scalar

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \bar{x}_1\, y_1 + \cdots + \bar{x}_n\, y_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k\, y_k$$

este un spaţiu Hilbert complex de dimensiune n.

3.5.9 Definiţie. Spunem despre două spaţii cu produs scalar $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{K}$ că sunt *izomorfe* dacă există un izomorfism liniar $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ cu

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \qquad \text{oricare ar fi } \; x, y \in \mathcal{H}.$$

3.5.10 Teoremă.

Orice spaţiu cu produs scalar real n-dimensional este izomorf cu $\mathbb{R}^n$
Orice spaţiu cu produs scalar complex n-dimensional este izomorf cu $\mathbb{C}^n$.

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o bază ortonormată în spaţiul considerat $\mathcal{H}$. Din

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle\, \langle v_i, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle v_i, x \rangle}\, \langle v_i, y \rangle$$

rezultă că izomorfismul liniar

$$\mathcal{H} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle v_1, x \rangle, \langle v_2, x \rangle, \ldots, \langle v_n, x \rangle) \tag{3.4}$$

şi respectiv,

$$\mathcal{H} \to \mathbb{C}^n : x \mapsto (\langle v_1, x \rangle, \langle v_2, x \rangle, \ldots, \langle v_n, x \rangle) \tag{3.5}$$

pastrează produsul scalar neschimbat.

3.5.11 Izomorfismele (3.4) şi (3.5) permit identificarea lui $\mathcal{H}$ cu $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{C}^n$.
Orice spaţiu cu produs scalar finit-dimensional este un spaţiu Hilbert.

În cazul spaţiilor finit-dimensionale, se poate utiliza termenul de *spaţiu Hilbert* în locul celui de *spaţiu cu produs scalar*.

3.5.12 Două spaţii Hilbert izomorfe sunt identice ca structură matematică.
Toate spaţiile Hilbert n-dimensionale sunt izomorfe între ele.
Orice spaţiu Hilbert n-dimensional se poate identifica cu spaţiul Hilbert $\mathbb{C}^n$.

3.5.13 Propoziţie. *Suma directă a două spaţii Hilbert*

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{K} = \{\ (x, y) \mid\ \ x \in \mathcal{H},\ \ \ y \in \mathcal{K}\ \}$$

echipată cu produsul scalar

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$$

este spaţiu Hilbert.

Demonstraţie. Norma asociată

$$||(x, y)|| = \sqrt{\langle (x, y), (x, y) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle} = \sqrt{||x||^2 + ||y||^2}$$

are proprietatea

$$\left.\begin{matrix} ||x|| \\ ||y|| \end{matrix}\right\} \leq ||(x, y)|| \leq ||x|| + ||y||, \qquad \text{oricare ar fi} \quad (x, y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}.$$

În particular, din relaţia

$$\left.\begin{matrix} ||x_k - x_\ell|| \\ ||y_k - y_\ell|| \end{matrix}\right\} \leq ||(x_k, y_k) - (x_\ell, y_\ell)|| \leq ||x_k - x_\ell|| + ||y_k - y_\ell||$$

rezultă că

$$(x_k, y_k)_{k \geq 0} \text{ este şir Cauchy} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} (x_k)_{k \geq 0} \text{ este şir Cauchy} \\ \text{şi} \\ (y_k)_{k \geq 0} \text{ este şir Cauchy,} \end{array} \right.$$

iar din relaţia

$$\left.\begin{matrix} ||x_k - a|| \\ ||y_k - b|| \end{matrix}\right\} \leq ||(x_k, y_k) - (a, b)|| \leq ||x_k - a|| + ||y_k - b||$$

rezultă că

$$\lim_{k \to \infty} (x_k, y_k) = (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \lim\limits_{k \to \infty} x_k = a \\ \text{şi} \\ \lim\limits_{k \to \infty} y_k = b. \end{array} \right.$$

3.5.14 Dacă $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ sunt baze ortonormate în $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{K}$, atunci

$$\{\,(v_1,0),(v_2,0),...,(v_n,0),(0,w_1),(0,w_2),...,(0,w_k)\,\}$$

este bază ortonormată în $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$.

3.5.15 Exemple. Avem $\mathbb{C}^2=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^3=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$, etc.

3.5.16 În funcţie de context, prin $\mathbb{C}^n$ se înţelege spaţiul Hilbert

$$\mathbb{C}^n=\{\;(x_1,x_2,...,x_n)\mid\;\; x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{C}\;\},$$

identificat cu spaţiul matricelor linie

$$\mathbb{C}^n=\{\;(x_1\;\;x_2\;\;\;...\;\;\;x_n)\mid\;\; x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{C}\;\},$$

sau spaţiul matricelor coloană

$$\mathbb{C}^n=\left\{\left.\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\\vdots\\x^n\end{pmatrix}={}^t(x_1\;\;x_2\;\;\;...\;\;\;x_n)\;\right|\;\;x^1,x^2,...,x^n\in\mathbb{C}\right\}.$$

3.5.17 Izomorfismul $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})\to\mathbb{C}^{nm}$:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\mapsto{}^t(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},\cdots,a_{n2},\cdots,a_{1m},\cdots,a_{nm})$$

devine un izomorfism de spaţii Hilbert dacă echipăm spaţiul vectorial complex $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ cu produsul scalar

$$\left\langle\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nm}\end{pmatrix}\right\rangle=\sum_{ij}\bar{a}_{ij}\,b_{ij},$$

adică dacă utilizăm *produsul scalar Hilbert-Schmidt*

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\,(A^*\,B),$$

unde A^* este adjuncta (complex conjugata transpusei) lui A.
Spaţiul $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ devine în acest fel un spaţiu Hilbert izomorf cu $\mathbb{C}^{nm}$.

3.5.18 Spaţiul $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ al tuturor operatorilor liniari $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ este un spaţiu Hilbert cu produsul scalar Hilbert-Schmidt

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\,(A^*B),$$

definit cu ajutorul unei baze şi independent de baza aleasă.
Norma asociată produsului scalar este

$$||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(A^*A)}. \tag{3.6}$$

3.5.19* O altă normă, neutilizată pe parcursul acestei cărţi, este

$$||A|| = \sup\{\ ||Ax||\ \mid\ x\in\mathcal{H} \text{ cu } \ ||x||=1\,\}.$$

3.5.20* Două norme $||\ ||_a$, $||\ ||_b : \mathcal{K} \longrightarrow [0,\infty)$ definite pe un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ se numesc *echivalente* dacă există $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ astfel încât

$$\alpha||x||_a \leq ||x||_b \leq \beta||x||_a, \qquad \text{oricare ar fi} \quad x\in\mathcal{K}.$$

În cazul unui spaţiu $\mathcal{K}$ finit-dimensional, se poate arăta că oricare două norme sunt echivalente. În particular, dacă $\mathcal{H}$ este un spaţiu Hilbert finit-dimensional, atunci orice normă $||\ ||:\mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow [0,\infty)$ este echivalentă cu norma Hilbert-Schmidt (3.6).

3.6 Mulţimi convexe

3.6.1 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial şi $M \subset \mathcal{V}$ o submulţime.
Spunem că M este *mulţime convexă* dacă

$$\{\,(1-t)x+ty \mid t\in[0,1]\,\} \subset M,$$

oricare ar fi $x, y \in M$.

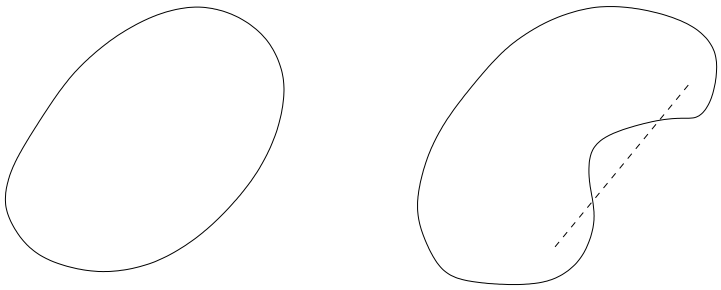

Figura 3.6: Mulţime convexă şi mulţime neconvexă.

3.6.2 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert, $x \in V$ şi $M \subset \mathcal{H}$ o submulţime.
Prin *distanţa de la x la M* se înţelege numărul

$$\delta(x, M) = \inf_{u \in M} ||x - u||.$$

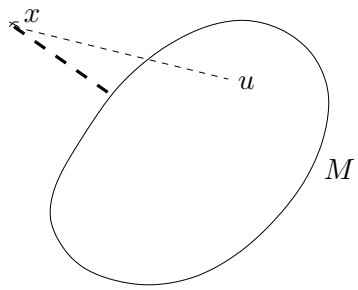

Figura 3.7: Distanţa de la x la M.

3.6.3* Teoremă *Dacă $\mathcal{H}$ este un spaţiu Hilbert, $M \subset \mathcal{H}$ este o mulţime convexă închisă şi $x \in \mathcal{H}-M$, atunci există un element unic $y \in M$ astfel încât*

$$\delta(x, M) = ||x - y||.$$

Demonstraţie. Fie $\delta = \delta(x, M)$. Arătăm mai întâi că $\delta > 0$. Presupunând că $\delta = 0$ rezultă că pentru orice $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ există $x_n \in M$ astfel încât $||x - x_n|| < \frac{1}{n}$ şi prin urmare $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Deoarece M este închisă ar rezulta că $x \in M$, în contradicţie cu ipoteza. Pentru fiecare $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ alegem $y_n \in M$ astfel încât

$$\delta \leq ||x - y_n|| < \delta + \frac{1}{n} \tag{3.7}$$

şi arătăm că $(y_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy. Scriind identitatea paralelogramului

$$2\,||x - y_n||^2 + 2\,||x - y_m||^2 = ||y_n - y_m||^2 + ||2x - y_n - y_m||^2$$

sub forma

$$||y_n - y_m||^2 = 2\,||x - y_n||^2 + 2\,||x - y_m||^2 - 4\left|\left|x - \left(\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m\right)\right|\right|^2,$$

obţinem că

$$||y_n - y_m||^2 \leq 2\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\delta + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\delta^2,$$

adică

$$||y_n - y_m||^2 \leq \frac{4\delta}{n} + \frac{4\delta}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \leq \frac{4\delta+2}{n} + \frac{4\delta+2}{m}.$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, alegând $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{8\delta}{N} < \varepsilon$, avem

$$||y_n - y_m||^2 \leq \varepsilon, \qquad \text{oricare ar fi} \quad \begin{matrix} n \geq N \\ m \geq N. \end{matrix}$$

Spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$ fiind complet, există $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ şi y aparţine mulţimii închise M. Trecând la limită în relaţia (3.7) obţinem că $\delta = ||x - y||$. Presupunând că există două elemente $y, y' \in M$ cu $\delta = ||x - y|| = ||x - y'||$ şi folosind identitatea paralelogramului deducem relaţia

$$\begin{aligned} 4\delta^2 &= 2\,||x-y||^2 + 2\,||x-y'||^2 = ||y-y'||^2 + ||2x-y-y'||^2 \\ &= ||y-y'||^2 + 4\,\left|\left|x - \left(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y'\right)\right|\right|^2 \geq ||y-y'||^2 + 4\delta^2 \end{aligned}$$

din care rezultă $y = y'$.

3.7 Adjunctul unui operator liniar

3.7.1 Teoremă. *Fie $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ spaţii Hilbert şi $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ un operator liniar. Există un operator liniar $A^* : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}$ care verifică relaţia*

$$\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{H}. \tag{3.8}$$

şi el este unic determinat.

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o bază în $\mathcal{H}$. Pentru $x \in \mathcal{K}$ fixat, aplicaţia

$$\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(y) = \langle x, Ay\rangle$$

este o formă liniară. Ştim (v. pag. 116-**2**) că există

$$a = \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi(v_j)}\, v_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle x, Av_j\rangle}\, v_j = \sum_{j=1}^{n} \langle Av_j, x\rangle v_j$$

astfel încât $\varphi(y) = \langle a, y\rangle$, $\forall y \in \mathcal{H}$. Punând $A^*x = a$, obţinem operatorul liniar

$$A^* : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad A^*x = \sum_{j=1}^{n} \langle Av_j, x\rangle v_j,$$

care satisface relaţia

$$\langle A^*x, y\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle Av_j, x\rangle\ v_j, y \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, Av_j\rangle\langle v_j, y\rangle$$
$$= \left\langle x, \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, y\rangle Av_j \right\rangle = \langle x, Ay\rangle, \quad \forall x\in\mathcal{K},\ y\in\mathcal{H}.$$

Presupunând că $B : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}$ este un alt operator satisfăcând (3.8), obţinem relaţia

$$\langle A^*x, y\rangle = \langle Bx, y\rangle, \qquad \forall x\in\mathcal{K},\ y\in\mathcal{H}$$

care conduce la $A^* = B$.

3.7.2 Definiţie. Fie $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ spaţii Hilbert şi $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{K}$ un operator liniar. Operatorul liniar $A^*:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{H}$ care verifică relaţia

$$\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \qquad \forall x\in\mathcal{K},\ y\in\mathcal{H}$$

este numit *adjunctul* lui A. Alte notaţii utilizate sunt A^+, $A^\dagger$.

3.7.3 Propoziţie. *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert. Dacă $A, B:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ sunt operatori liniari şi dacă $\lambda\in\mathbb{C}$, atunci*

$$A+B : \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}, \quad (A+B)x = Ax + Bx,$$
$$\lambda A : \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}, \quad (\lambda A)x = \lambda\ Ax,$$
$$AB : \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}, \quad (AB)x = A(Bx),$$

sunt operatori liniari şi

$$(A^*)^* = A, \qquad (A+B)^* = A^* + B^*,$$
$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda}\, A^*, \qquad (AB)^* = B^*\, A^*.$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}(A+B)(\alpha x+\beta y) &= A(\alpha x+\beta y) + B(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax + \beta Ay + \alpha Bx + \beta By\\ &= \alpha(A+B)x + \beta(A+B)y;\end{aligned}$$

$$(\lambda A)(\alpha x+\beta y) = \lambda\, A(\alpha x+\beta y) = \lambda\alpha Ax + \lambda\beta Ay = \alpha(\lambda A)x + \beta(\lambda A)y;$$

$$\begin{aligned}(AB)(\alpha x+\beta y) &= A(B(\alpha x+\beta y)) = A(\alpha Bx + \beta By) = \alpha A(Bx) + \beta A(By)\\ &= \alpha(AB)x + \beta(AB)y.\end{aligned}$$

Relaţia $(A^*)^* = A$ rezultă din

$$\langle (A^*)^*x, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle, \qquad \forall x, y\in\mathcal{H}.$$

Avem

$$\begin{aligned}\langle (A+B)^*x, y\rangle &= \langle x, (A+B)y\rangle = \langle x, Ay\rangle + \langle x, By\rangle\\ &= \langle A^*x, y\rangle + \langle B^*x, y\rangle = \langle (A^*+B^*)x, y\rangle,\end{aligned}$$

adică, pentru orice $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle (A+B)^* x, y\rangle = \langle (A^* + B^*)x, y\rangle, \qquad \forall y \in \mathcal{H}.$$

De aceea, $(A+B)^* = A^* + B^*$. Similar, pentru orice $x \in \mathcal{H}$ avem

$$\begin{aligned}\langle (\lambda A)^* x, y\rangle &= \langle x, (\lambda A)y\rangle = \langle x, \lambda\, Ay\rangle = \bar{\lambda}\,\langle x, Ay\rangle \\ &= \bar{\lambda}\langle A^* x, y\rangle = \langle \bar{\lambda}\, A^* x, y\rangle = \langle (\bar{\lambda} A^*)x, y\rangle, \qquad \forall y \in \mathcal{H},\end{aligned}$$

şi acestă relaţie conduce la

$$(\lambda A)^* x = (\bar{\lambda} A^*)x, \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

adică $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$. Oricare ar fi $x \in \mathcal{H}$ are loc relaţia

$$\begin{aligned}\langle (AB)^* x, y\rangle &= \langle x, (AB)y\rangle = \langle x, A(By)\rangle = \langle A^* x, By\rangle \\ &= \langle B^*(A^* x), y\rangle = \langle (B^* A^*)x, y\rangle, \qquad \forall y \in \mathcal{H}\end{aligned}$$

care conduce la $(AB)^* = B^*\, A^*$.

3.7.4 Teoremă. *Matricea adjunctului A^* al unui operator liniar $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ în raport cu o bază ortonormată este adjuncta matricei operatorului A în raport cu baza considerată.*

Demonstraţie. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}$$

matricele lui A şi A^* în raport cu baza ortonormată $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, adică

$$Av_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, v_i, \qquad A^* v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^*\, v_i. \tag{3.9}$$

Relaţia

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, u\rangle v_i$$

are loc pentru orice $u \in \mathcal{H}$. Înlocuind pe u cu Av_j şi respectiv $A^* v_j$ obţinem

$$Av_j = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, Av_j\rangle v_i, \qquad A^* v_j = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, A^* v_j\rangle v_i. \tag{3.10}$$

Din (3.9) şi (3.10) rezultă relaţiile

$$a_{ij} = \langle v_i, Av_j\rangle, \qquad a_{ij}^* = \langle v_i, A^* v_j\rangle$$

care conduc la

$$a_{ij}^* = \langle v_i, A^* v_j\rangle = \langle Av_i, v_j\rangle = \overline{\langle v_j, Av_i\rangle} = \bar{a}_{ji}.$$

3.7.5* Teoremă. *Dacă* $\Lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ *este o transformare liniară, atunci operatorii*

$$\Lambda^*\Lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \qquad şi \qquad \Lambda\Lambda^* : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

au aceleaşi valori proprii nenule, cu aceleaşi multiplicităţi.

Demonstraţie. Dacă μ este o valoare proprie a lui $\Lambda^*\Lambda$ şi u un vector propriu corespunzător, atunci

$$\Lambda^*\Lambda u = \mu u.$$

În cazul în care $\mu \neq 0$, din acestă relaţie obţinem egalitatea

$$\Lambda\Lambda^*\Lambda u = \mu \Lambda u$$

posibilă numai dacă $\Lambda u \neq 0$. De aceea a este o valoare proprie a operatorului $\Lambda\Lambda^*$ iar Λu un vector propriu corespunzător. Dacă u_1, u_2, ... , u_k sunt vectori proprii liniar independenţi ai operatorului $\Lambda^*\Lambda$ corespunzători valorii μ, atunci din

$$\alpha_1 \Lambda u_1 + \alpha_2 \Lambda u_2 + \cdots + \alpha_k \Lambda u_k = 0$$

obţinem relaţia

$$\alpha_1 \Lambda^*\Lambda u_1 + \alpha_2 \Lambda^*\Lambda u_2 + \cdots + \alpha_k \Lambda^*\Lambda u_k = 0,$$

echivalentă cu egalitatea

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$$

care conduce la $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Prin urmare, Λu_1, ... , Λu_k sunt vectori liniar independenţi.

3.7.6 Utilizând notaţia lui Dirac, fiecărui vector $|v\rangle \in \mathcal{H}$ îi asociem forma liniară

$$\langle v| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \,:\, |w\rangle \mapsto \langle v|w\rangle.$$

Dacă $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este operator liniar, atunci

$$\langle Av|w\rangle = \langle v|A^*w\rangle = \langle v|A^*|w\rangle.$$

Forma liniară corespunzătoare vectorului $A|v\rangle$ este $\langle v|A^*$.

3.7.7 Sistemul de vectori $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ este bază ortonormată dacă şi numai dacă

$$\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i| = I.$$

Dacă $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este operator liniar, atunci

$$A = IAI = \sum_{i=1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i|A\sum_{j=1}^{n} |v_j\rangle\langle v_j| = \sum_{i,j=1}^{n} \langle v_i|A|v_j\rangle \ |v_i\rangle\langle v_j|.$$

3.7.8 Exerciţiu. Să se arate că adjunctul operatorului $|u\rangle\langle v|$ este $|v\rangle\langle u|$, adică avem

$$(|u\rangle\langle v|)^* = |v\rangle\langle u|.$$

Soluţie. Elementele matriceale corespunzătoare satisfac relaţia

$$\langle v_i|u\rangle\langle v|v_j\rangle = \overline{\langle u|v_i\rangle}\,\overline{\langle v_j|v\rangle} = \overline{\langle v_j|v\rangle\langle u|v_i\rangle}.$$

3.8 Operatori autoadjuncţi (hermitieni)

3.8.1 Definiţie. Pe un spaţiu finit-dimensional, un *operator autoadjunct*

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

este un operator care coincide cu adjunctul ($A = A^*$), adică

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{3.11}$$

3.8.2 Notăm cu $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ mulţimea operatorilor autoadjuncţi definiţi pe $\mathcal{H}$, adică

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{H}) &= \{\, A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid A^* = A \,\} \\ &= \{\, A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \ \ \forall x, y \in \mathcal{H} \,\}.\end{aligned}$$

3.8.3 Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert bidimensional (de exemplu, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$) şi fie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ o bază ortonormată fixată. Operatorul identitate

$$I : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$$

şi operatorii Pauli (mai multe notaţii sunt prezentate)

$$\begin{aligned}&\sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, && \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \\ &\sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, && \sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y = \mathrm{i}\,|1\rangle\langle 0| - \mathrm{i}\,|0\rangle\langle 1| \\ &\sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, && \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\end{aligned}$$

sunt operatori autoadjuncţi.

3.8.4 Propoziţie.

a) $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \implies A + B \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$.

b) $\left.\begin{array}{r} A \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies \alpha A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$.

c) Dacă $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, *atunci* :

$$AB \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \iff AB = BA.$$

d) Dacă *operatorul* $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ *este inversabil*, *atunci* $A^{-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Demonstraţie. Utilizăm proprietăţile adjunctului prezentate la pag. 131-**3**.
a) Avem $(A + B)^* = A^* + B^* = A + B$
b) Avem $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^* = \alpha A$.
c) Dacă $AB \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, atunci $AB = (AB)^* = B^* A^* = BA$.
Dacă $AB = BA$, atunci $(AB)^* = B^* A^* = BA = AB$ şi prin urmare $AB \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$.
d) Avem $\langle A^{-1}x, y\rangle = \langle A^{-1}x, A(A^{-1}y)\rangle = \langle A(A^{-1}x), A^{-1}y\rangle = \langle x, A^{-1}y\rangle$.

3.8.5 Unele rezultate similare se pot obţine în cazul matricelor hermitiene. Spaţiul matricelor hermitiene $n \times n$ este un spaţiu Hilbert real de dimensiune n^2 cu produsul scalar definit prin relaţia

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB)$$

Matricele

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

formează o bază ortogonală în spaţiul matricelor hermitiene 2×2.

O altă bază ortogonală remarcabilă este $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Matricele

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

formează o bază ortogonală în spaţiul matricelor hermitiene 3×3.

3.8.6 Propoziţie. *Un operator liniar $A: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este autoadjunct dacă şi numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată este hermitiană.*

Demonstraţie. Consecinţă directă a rezultatului prezentat la pag. 132-**4**.

3.8.7 Spaţiul operatorilor autoadjuncţi $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ este un spaţiu vectorial real.
Echipat cu produsul scalar

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$$

el devine un spaţiu Hilbert real de dimensiune d^2, unde $d = \dim \mathcal{H}$.

3.8.8 În spaţiul Hilbert $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ sistemul $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ este o bază ortogonală.
Fiecare operator $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ admite o reprezentare de forma (v. pag. 31-**6**)

$$A = \frac{1}{2}\left(a_0 I + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\right) = \frac{1}{2}\left(a_0 I + a\cdot\sigma\right)$$

cu $a_0 \in \mathbb{R}$ şi $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ unic determinaţi.
Valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a_0 \pm ||a||)$.

3.8.9 Distanţa definită de produsul scalar în $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ este

$$d(A, B) = ||A-B|| = \sqrt{\langle A-B, A-B\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(A-B)^2}.$$

În cazul $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, o altă distanţă foarte utilă este

$$\tilde{d}\left(\frac{1}{2}\left(a_0 I + a\cdot\sigma\right), \frac{1}{2}\left(b_0 I + b\cdot\sigma\right)\right) = \frac{1}{2}(|a_0 - b_0| + ||a-b||).$$

3.8.10 Propoziţie. *Dacă $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este operator autoadjunct, atunci:*
a) valorile proprii ale lui A sunt reale;
b) vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

Demonstraţie. a) Fie λ o valoare proprie şi $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda u$. Din relaţia $\langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle$ rezultă că $\lambda = \bar{\lambda}$.
b) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ două valori proprii distincte şi u_1, u_2 vectori proprii corespunzători, adică $Au_1 = \lambda_1 u_1$ şi $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Din $\langle Au_1, u_2\rangle = \langle u_1, Au_2\rangle$ rezultă $\langle u_1, u_2\rangle = 0$.

3.8.11 Propoziţie. *În cazul unui operator auto-adjunct, toate radăcinile polinomului caracteristic sunt reale.*

Demonstraţie Fie $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ şi fie λ_1 o rădăcină a polinomului caracteristic, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0.$$

În acest caz, sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda_1)x_n = 0 \end{cases}$$

admite în $\mathbb{C}^n$ o soluţie $(x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0)$. Adunând ecuaţiile sistemului înmulţite respectiv cu $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_n$ obţinem relaţia

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_k \bar{x}_j = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{x}_j.$$

Deoarece matricea lui A într-o bază ortonormată este hermitiană, adică $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$, avem

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_k \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \frac{\sum_{j,k=1}^{n} \bar{a}_{kj} x_k \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \bar{\lambda}_1.$$

3.8.12 Teoremă. *Dacă $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este operator autoadjunct, atunci există o bază ortonormată $\mathfrak{B}$ în $\mathcal{H}$ astfel încât matricea lui A în raport cu $\mathfrak{B}$ este o matrice diagonală.*

Demonstraţie. Utilizăm inducţia matematică. Afirmaţia este evident adevărată dacă

$\dim \mathcal{H} = 1$. Presupunând că afirmaţia este adevărată în cazul $\dim \mathcal{H} = n-1$, arătăm că ea este adevărată şi în cazul $\dim \mathcal{H} = n$. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu vectorial de dimensiune n şi fiet $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Ştim că A are cel puţin o valoare proprie λ_1. Fie $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda_1 u$. Vectorul unitar $v_1 = \frac{u}{||u||}$ este şi el vector propriu corespunzător valorii λ_1. Subspaţiul vectorial format din toţi vectorii ortogonali pe v_1,

$$\mathcal{K} = \{v_1\}^{\perp} = \{\ x \in \mathcal{H} \mid\ \langle v_1, x\rangle = 0\ \},$$

este un subspaţiu invariant

$$x \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \langle v_1, Ax\rangle = \langle Av_1, x\rangle = \lambda_1 \langle v_1, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax \in \mathcal{K}$$

de dimensiune $n-1$ şi $\text{span}\{v_1\} \oplus \mathcal{K} = \mathcal{H}$. Relaţia $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ fiind satisfăcută de orice $x, y \in \mathcal{H}$, rezultă că restricţia lui A la $\mathcal{K}$

$$A|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

verifică relaţia $\langle A|_{\mathcal{K}} x, y\rangle = \langle x, A|_{\mathcal{K}} y\rangle$ oricare ar fi $x, y \in \mathcal{K}$. Aceasta arată că $A|_{\mathcal{K}}$ este operator autoadjunct. În virtutea ipotezei de inducţie, există o bază ortonormată $\{v_2, v_3, ..., v_n\}$ în $\mathcal{K}$ în raport cu care matricea lui $A|_{\mathcal{K}}$ este o matrice diagonală,

$$A|_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sistemul de vectori $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ este o bază ortonormată în $\mathcal{H}$ şi matricea lui A în raport cu baza $\mathfrak{B}$ este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

3.8.13 Cu notaţiile din demonstraţia teoremei, operatorul A admite reprezentarea

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |v_i\rangle\langle v_i| = \lambda_1\, |v_1\rangle\langle v_1| + \lambda_2\, |v_2\rangle\langle v_2| + \cdots + \lambda_n\, |v_n\rangle\langle v_n|.$$

De exemplu, avem

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \qquad \sigma_x = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|$$
$$\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \qquad \sigma_y = |\oplus\rangle\langle \oplus| - |\ominus\rangle\langle \ominus|$$

unde

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \qquad |\oplus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \mathrm{i}\,|1\rangle) \qquad |\ominus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - \mathrm{i}\,|1\rangle).$$

3.8.14 Teoremă. *Doi operatori autoadjuncţi $A, B : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ comută, adică*

$$AB = BA,$$

dacă şi numai dacă există o bază ortonormată formată din vectori proprii comuni ai lui A şi B.

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" Dacă $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este o bază ortonormată formată din vectori proprii comuni ai lui A şi B,

$$Av_j = \alpha_j v_j, \qquad\qquad Bv_j = \beta_j v_j,$$

atunci, oricare ar fi $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, avem

$$(AB)x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, ABv_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \alpha_j\beta_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\, BAv_j = (BA)x.$$

"$\Rightarrow$" Presupunem că $AB = BA$ şi că B are doar două valori proprii β_1 şi β_2. Subspaţiile proprii corespunzătoare $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$, care verifică relaţiile

$$\begin{array}{ll} Bx = \beta_1 x, & \text{oricare ar fi} \quad x \in \mathcal{H}_1, \\ Bx = \beta_2 x, & \text{oricare ar fi} \quad x \in \mathcal{H}_2, \end{array}$$

sunt ortogonale şi $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Deoarece

$$\begin{array}{lllll} x \in \mathcal{H}_1 & \Longrightarrow & B(Ax) = A(Bx) = \beta_1(Ax) & \Longrightarrow & Ax \in \mathcal{H}_1, \\ x \in \mathcal{H}_2 & \Longrightarrow & B(Ax) = A(Bx) = \beta_2(Ax) & \Longrightarrow & Ax \in \mathcal{H}_2, \end{array}$$

putem considera restricţiile $A|_{\mathcal{H}_1} : V_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ şi $A|_{\mathcal{H}_2} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$. Operatorii $A|_{\mathcal{H}_1}$ şi $A|_{\mathcal{H}_2}$ fiind autoadjuncţi, în spaţiile Hilbert $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$ există baze ortonormate $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ şi $\{v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\}$ formate din vectori proprii ai lui A. Sistemul de vectori $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\}$ este o bază ortonormată în $\mathcal{H}$ formată din vectori proprii ai lui A şi B. Dacă B are mai multe valori proprii, demonstraţia este similară.

3.8.15* În spaţiul Hilbert $\mathbb{C}^2$, vectorii

$$\begin{array}{ll} |u_1\rangle = |0\rangle, & |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}|1\rangle, \\ |u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle, & |u_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}|1\rangle \end{array}$$

formează un *frame* exact

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}|u_j\rangle\langle u_j| = I.$$

Operatorii autoadjuncţi

$$\Pi_j = |u_j\rangle\langle u_j|, \qquad \text{unde} \quad j\in\{1,2,3,4\},$$

formează o bază în spaţiul Hilbert $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ şi

$$\langle\Pi_j,\Pi_k\rangle = |\langle u_j|u_k\rangle|^2 = \frac{1}{3}, \qquad \text{pentru} \quad j\neq k.$$

Frame-ul $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,|u_3\rangle,|u_4\rangle\}$ este simetric şi

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^2) = \left\{ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\,|u_j\rangle\langle u_j| \;\middle|\; \alpha_j\in\mathbb{C} \right\},$$

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}^2) = \left\{ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\,|u_j\rangle\langle u_j| \;\middle|\; \alpha_j\in\mathbb{R} \right\}.$$

3.8.16* Teoremă. *Dacă $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{d^2}$ este un frame exact în spaţiul Hilbert d-dimensional $\mathcal{H}$ şi dacă există o constantă $a\in(0,\infty)$ astfel încât*

$$|\langle u_j|u_k\rangle|^2 = a, \qquad \textit{pentru} \quad j\neq k,$$

atunci $a = 1/(d{+}1)$ şi $\{|u_j\rangle\langle u_j|\}_{j=1}^{d^2}$ este bază în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Demonstraţie. Plecând de la rezoluţia identităţii

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d^2}|u_j\rangle\langle u_j| = I,$$

obţinem relaţia

$$d = \operatorname{tr} I^2 = \frac{1}{d^2}\sum_{j,k=1}^{d^2}|\langle u_j|u_k\rangle|^2 = \frac{1}{d^2}(d^2 + a\,d^2(d^2-1)),$$

din care rezultă $a = 1/(d{+}1)$. Presupunând că $\sum_{j=1}^{d^2}\alpha_j\,|u_j\rangle\langle u_j| = 0$, obţinem relaţia

$$0 = \sum_{j=1}^{d^2}\alpha_j\,|\langle u_j|u_k\rangle|^2 = \alpha_k + \frac{1}{d+1}\sum_{j\neq k}\alpha_j = \frac{1}{d+1}\left(d\,\alpha_k + \sum_{j=1}^{d^2}\alpha_j\right)$$

care arată că $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{d^2}$ şi prin urmare $0 = \sum_{j=1}^{d^2}\alpha_j\,|u_j\rangle\langle u_j| = \alpha_1 I$. De aceea, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{d^2} = 0$ şi operatorii $|u_j\rangle\langle u_j|$, în număr de d^2, sunt linear independenţi.

3.8.17* În spaţiul Hilbert $\mathbb{C}^3$, vectorii unitari

$$|u_1\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle), \qquad |u_2\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle+|2\rangle), \qquad |u_3\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle+|0\rangle),$$
$$|u_4\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon|0\rangle+\bar{\varepsilon}|1\rangle), \qquad |u_5\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon|1\rangle+\bar{\varepsilon}|2\rangle), \qquad |u_6\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon|2\rangle+\bar{\varepsilon}|0\rangle),$$
$$|u_7\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\varepsilon}|0\rangle+\varepsilon|1\rangle), \qquad |u_8\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\varepsilon}|1\rangle+\varepsilon|2\rangle), \qquad |u_9\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\varepsilon}|2\rangle+\varepsilon|0\rangle)$$

unde $\{|0\rangle,|1\rangle,|2\rangle\}$ este o bază ortonormată şi $\varepsilon=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, formează un frame exact

$$\tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{9}|u_j\rangle\langle u_j|=I$$

simetric

$$|\langle u_j|u_k\rangle|^2=\frac{1}{4} \qquad \text{pentru} \quad j\neq k,$$

şi astfel încât $\{|u_j\rangle\langle u_j|\}_{j=1}^{9}$ este bază în $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$.

3.9 Elemente de calcul funcţional

3.9.1 Plecând de la un operator liniar $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ putem defini operatorii

$$A^0=I, \quad A^1=A, \quad A^2=AA, \quad A^3=AAA, \quad ...$$

şi

$$P(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mI,$$

oricare ar fi polinomul $P(X)=a_0X^m+a_1X^{m-1}+\cdots+a_{m-1}X+a_m$.

3.9.2 În spaţiul Hilbert $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, despre o serie de operatori

$$\sum_{k\geq 0}A_k$$

spunem că este convergentă dacă există $B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ astfel încât

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}A_k=B,$$

adică astfel încât

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{m}A_k - B\right\| = 0.$$

Operatorul B se numeşte *suma seriei* şi scriem

$$B = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots \qquad \text{sau} \qquad B = \sum_{k=0}^{\infty} A_k.$$

3.9.3 Urmând analogia cu dezvoltările în serie de puteri

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z &= 1 + \tfrac{1}{1!}z + \tfrac{1}{2!}z^2 + \tfrac{1}{3!}z^3 + \cdots, \\ \cos z &= 1 - \tfrac{1}{2!}z^2 + \tfrac{1}{4!}z^4 - \tfrac{1}{6!}z^6 + \cdots, \\ \sin z &= \tfrac{1}{1!}z - \tfrac{1}{3!}z^3 + \tfrac{1}{5!}z^5 - \tfrac{1}{7!}z^7 + \cdots, \end{aligned}$$

definim operatorii

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A &= 1 + \tfrac{1}{1!}A + \tfrac{1}{2!}A^2 + \tfrac{1}{3!}A^3 + \cdots, \\ \cos A &= 1 - \tfrac{1}{2!}A^2 + \tfrac{1}{4!}A^4 - \tfrac{1}{6!}A^6 + \cdots, \\ \sin A &= \tfrac{1}{1!}A - \tfrac{1}{3!}A^3 + \tfrac{1}{5!}A^5 - \tfrac{1}{7!}A^7 + \cdots. \end{aligned}$$

Se poate arăta că seriile de operatori implicate sunt convergente.

3.9.4 Teoremă. *În cazul a doi operatori liniari $A, B : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ avem:*

$$AB = BA \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}.$$

Demonstraţie. Înmulţind termen cu termen seriile absolut convergente obţinem

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B &= \sum_{j=0}^{\infty}\tfrac{A^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{B^k}{k!} = \sum_{j,k=0}^{\infty}\tfrac{1}{j!\,k!}A^jB^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\sum_{j+k=n}\tfrac{n!}{j!\,k!}A^jB^k = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n!}(A+B)^n = \mathrm{e}^{A+B}. \end{aligned}$$

3.9.5 În cazul unui operator diagonalizabil

$$A = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,|v_i\rangle\langle v_i|,$$

avem

$$A^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\,|v_i\rangle\langle v_i|v_j\rangle\langle v_j| = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\,|v_i\rangle\langle v_i|,$$

$$\alpha A^2+\beta A+\gamma I=\sum_{i=1}^{n}(\alpha\lambda_i^2+\beta\lambda_i+\gamma)\,|v_i\rangle\langle v_i|$$

şi

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(\lambda_i)\,|v_i\rangle\langle v_i|,\qquad \text{oricare ar fi polinomul } P.$$

Putem defini operatorul

$$f(A):\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H},\qquad f(A)=\sum_{i=1}^{n}f(\lambda_i)\,|v_i\rangle\langle v_i|,$$

pentru orice funcţie $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ al cărei domeniu de definiţie conţine $\lambda_1,...,\lambda_n$. Deoarece $f(A)$ depinde doar de valorile luate de funcţia f în punctele $\lambda_1,...,\lambda_n$, acelaşi operator corespunde la o infinitate de funcţii.
În particular, avem

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^A&=\textstyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_i}\,|v_i\rangle\langle v_i|,\\ \cos A&=\textstyle\sum_{i=1}^{n}\cos\lambda_i\,|v_i\rangle\langle v_i|,\\ \sin A&=\textstyle\sum_{i=1}^{n}\sin\lambda_i\,|v_i\rangle\langle v_i|.\end{aligned}$$

Dacă $\lambda_1,...,\lambda_n\in[0,\infty)$, atunci putem defini operatorul

$$\sqrt{A}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\,|v_i\rangle\langle v_i|$$

cu proprietatea $(\sqrt{A})^2=A$. Ţinând seama că $\lim\limits_{\lambda\searrow 0}\lambda\ln\lambda=0$, putem admite că $0\ln 0=0$ şi defini operatorul

$$A\,\ln A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\ln\lambda_i\,|v_i\rangle\langle v_i|,$$

3.9.6 Plecând de la reprezentările (v. pag. 119-**13** şi pag. 138-**13**)

$$\sigma_x=|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|,\qquad \sigma_y=|\oplus\rangle\langle\oplus|-|\ominus\rangle\langle\ominus|,\qquad \sigma_z=|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|,$$

unde

$$|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad |+\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\qquad |\oplus\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix},$$

$$|1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\qquad |-\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\qquad |\ominus\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix},$$

se obţine

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}\sigma_x} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}|+\rangle\langle+| + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}|-\rangle\langle-| \\
&= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\mathrm{i}\sin\frac{t}{2} \\ -\mathrm{i}\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \\
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}\sigma_y} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}|\oplus\rangle\langle\oplus| + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}|\ominus\rangle\langle\ominus| \\
&= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \\
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}\sigma_z} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}|0\rangle\langle 0| + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}|1\rangle\langle 1| \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.10 Operatori pozitivi

3.10.1 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert şi $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ un operator autoadjunct.

Spunem că A este *operator pozitiv* şi scriem $A \geq 0$ dacă

$$\langle x|A|x\rangle \geq 0, \qquad \text{oricare ar fi} \qquad |x\rangle \in \mathcal{H}.$$

Spunem că A este *operator pozitiv definit* şi scriem $A > 0$ dacă

$$\langle x|A|x\rangle > 0, \qquad \text{oricare ar fi} \qquad |x\rangle \neq 0.$$

3.10.2 Orice operator autoadjunct A este diagonalizabil şi se poate scrie sub forma

$$A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|.$$

Oricare ar fi $|x\rangle \in \mathcal{H}$ avem

$$\langle x|A|x\rangle = \sum_i \lambda_i \, |\langle v_i|x\rangle|^2.$$

Operatorul A este pozitiv dacă şi numai dacă $\lambda_i \geq 0$, oricare ar fi i.

Operatorul A este pozitiv definit dacă şi numai dacă $\lambda_i > 0$, oricare ar fi i.

3.10.3 Teoremă. *Operatorul liniar $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ este pozitiv dacă şi numai dacă există un operator liniar $B:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ astfel încât*

$$A = B^*B.$$

Demonstraţie. Dacă $A = B^*B$, atunci A este pozitiv deoarece

$$\langle x, Ax\rangle = \langle x, B^*Bx\rangle = \langle Bx, Bx\rangle \geq 0, \qquad \text{oricare ar fi } x\in\mathcal{H}.$$

Dacă $A=\sum_i \lambda_i|v_i\rangle\langle v_i| \geq 0$, atunci putem alege $B=\sum_i \sqrt{\lambda_i}\,|v_i\rangle\langle v_i|$.

3.10.4 Definiţie. În spaţiul $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, definim relaţia de inegalitate

$$A \leq B \qquad \text{dacă} \qquad B-A \geq 0.$$

3.10.5 Exerciţiu. Oricare ar fi operatorul liniar C, avem

$$A\leq B \quad\Longrightarrow\quad CAC^*\leq CBC^*.$$

3.10.6 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ două spaţii Hilbert. Spunem despre o aplicaţie liniară

$$f : \mathcal{A}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{K})$$

că este o *aplicaţie pozitivă* dacă

$$A \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad f(A) \geq 0.$$

3.10.7 Mulţimea operatorilor pozitivi definiţi pe un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$ este o mulţime convexă: oricare ar fi $x \in \mathcal{H}$ şi oricare ar fi $\lambda \in [0, 1]$ avem

$$\begin{array}{l}\langle x, Ax\rangle \geq 0,\\ \langle x, Bx\rangle \geq 0\end{array} \quad\Rightarrow\quad \langle x, ((1-\lambda)A + \lambda B)x\rangle \geq 0.$$

3.10.8 Operatorul autoadjunct

$$A:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2, \qquad A = \frac{1}{2}\left(a_0 I + a\cdot\sigma\right),$$

verifică relaţia $0 \leq A \leq I$ dacă şi numai dacă

$$||a|| \leq a_0 \leq 2 - ||a||.$$

În particular, în acest caz $||a|| \leq 1$.

3.10.9 Dacă $A, B : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sunt operatori liniari, atunci

$$\begin{array}{l}0 \leq A \leq I,\\ 0 \leq B \leq I\end{array} \quad\Longrightarrow\quad 0 \leq (1-t)A+tB \leq I, \quad \text{oricare ar fi} \quad t\in[0,1].$$

3.11 Proiectori

3.11.1 Dacă $\mathcal{H}$ este spaţiu Hilbert şi $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un subspaţiu, atunci (v. pag. 115-**28**)

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp}.$$

Fiecare vector $|x\rangle \in \mathcal{H}$ poate fi scris în mod unic sub forma

$$|x\rangle = |x'\rangle + |x''\rangle \qquad \text{cu} \qquad \begin{array}{l} |x'\rangle \in \mathcal{K}, \\ |x''\rangle \in \mathcal{K}^{\perp} \end{array}$$

şi aplicaţia

$$P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad P|x\rangle = |x'\rangle,$$

este un operator liniar,

$$P(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle) = \alpha|x'\rangle + \beta|y'\rangle = \alpha P|x\rangle + \beta P|y\rangle,$$

cu proprietatea $P(\mathcal{H}) = \mathcal{K}$, numit *proiectorul* (ortogonal) pe subspaţiul $\mathcal{K}$.

3.11.2 Din relaţia

$$||x||^2 = \langle x|x\rangle = \langle x'+x''|x'+x''\rangle = \langle x'|x'\rangle + \langle x''|x''\rangle = ||x'||^2 + ||x''||^2$$

rezultă că

$$||Px|| \leq ||x||, \qquad \text{oricare ar fi} \quad |x\rangle \in \mathcal{H},$$

şi

$$||Px|| = ||x|| \quad \Longleftrightarrow \quad |x\rangle \in \mathcal{K}.$$

3.11.3 Din relaţiile

$$\langle x|P|x\rangle = \langle x|x'\rangle = \langle x'|x'\rangle = ||Px||^2 \geq 0,$$
$$\langle x|x\rangle = \langle x'+x''|x'+x''\rangle = \langle x'|x'\rangle + \langle x''|x''\rangle \geq \langle x'|x'\rangle = \langle x|P|x\rangle,$$

adevărate oricare ar fi $|x\rangle \in \mathcal{H}$, rezultă că

$$0 \leq \langle x|P|x\rangle \leq \langle x|I|x\rangle,$$

adică

$$0 \leq P \leq I.$$

3.11.4 Fiecare bază ortonormată $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_k\rangle\}$ a lui $\mathcal{K}$ poate fi extinsă până la o bază $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_k\rangle, |v_{k+1}\rangle, ..., |v_n\rangle\}$ a lui $\mathcal{H}$ şi, pentru orice $|x\rangle$, avem

$$|x'\rangle = \sum_{i=1}^{k} |v_i\rangle\langle v_i|x\rangle, \qquad \text{şi} \qquad |x''\rangle = \sum_{i=k+1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i|x\rangle.$$

Relaţia

$$P|x\rangle = \sum_{i=1}^{k} |v_i\rangle\langle v_i|x\rangle$$

verificată oricare ar fi $|x\rangle \in \mathcal{H}$, arată că P poate fi definit în felul următor

$$P = \sum_{i=1}^{k} |v_i\rangle\langle v_i|. \tag{3.12}$$

Matricea lui P în baza considerată are forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Complementul ortogonal al proiectorului P

$$P^{\perp} = I - P = \sum_{i=k+1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i|$$

este proiectorul corespunzător subspaţiului $\mathcal{K}^{\perp}$.

3.11.5 Teoremă. *Un operator liniar $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este proiector dacă şi numai dacă*

$$P^2 = P = P^*. \tag{3.13}$$

Demonstraţie. Dacă P este proiector, atunci relaţia (3.13) rezultă din (3.12). Admiţând că P verifică relaţia (3.13), dovedim că P este proiectorul corespunzător subspaţiului

$$\mathcal{K} = \{\, |u\rangle \mid \; P|u\rangle = |u\rangle \,\}$$

Orice vector $|x\rangle \in \mathcal{H}$ poate fi scris sub forma

$$|x\rangle = P|x\rangle + (|x\rangle - P|x\rangle).$$

Din relaţia $P(P|x\rangle) = P^2|x\rangle = P|x\rangle$ rezultă că $P|x\rangle \in \mathcal{K}$. Oricare ar fi $|u\rangle \in \mathcal{K}$, avem $P|u\rangle = |u\rangle$, şi prin urmare $\langle u| = \langle u|P^*$. Din relaţia

$$\langle u|(|x\rangle - P|x\rangle) = \langle u|P^*|x\rangle - \langle u|P^*P|x\rangle = 0$$

rezultă că $|x\rangle - P|x\rangle \in \mathcal{K}^\perp$.

3.11.6 Operatorul autoadjunct (v. pag. 136-**8**)

$$A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \qquad A = \frac{1}{2}\left(a_0 I + a \cdot \sigma\right),$$

este proiector dacă şi numai dacă

$$a_0 = ||a|| = 1.$$

3.11.7 Exerciţiu. Singurele valori proprii posibile ale unui proiector P sunt 0 şi 1.

Soluţie. Dacă λ este valoare proprie a lui P, atunci există $|x\rangle \neq 0$ astfel încât $P|x\rangle = \lambda\,|x\rangle$. Din relaţia

$$(\lambda^2 - \lambda)\,|x\rangle = (P^2 - P)|x\rangle = 0$$

obţinem egalitatea $\lambda^2 - \lambda = 0$, verificată numai de $\lambda = 0$ şi $\lambda = 1$.

3.11.8 Dacă P este proiectorul corespunzător subspaţiului $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, atunci spaţiul propriu corespunzător lui 1 este $\mathcal{K}$, iar cel corespunzător lui 0 este $\mathcal{K}^\perp$, adică

$$\mathcal{K} = \{\, |u\rangle \mid \; P|u\rangle = |u\rangle \,\} \qquad \text{şi} \qquad \mathcal{K}^\perp = \{\, |u\rangle \mid \; P|u\rangle = 0 \,\}.$$

3.11.9 Dacă proiectorii $P_1, P_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sunt astfel încât $P_1P_2 = 0$, atunci

$$P_2P_1 = P_2^*P_1^* = (P_1P_2)^* = 0.$$

3.11.10 Definiţie. Doi proiectori $P_1, P_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se numesc *ortogonali* dacă $P_1P_2 = 0$.

3.11.11 Propoziţie. *Proiectorii $P_1, P_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă subspaţiile corespunzătoare $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ sunt ortogonale.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{K}_1 \perp \mathcal{K}_2$, atunci $P_2|x\rangle \in \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1^\perp$, şi prin urmare $P_1P_2|x\rangle = 0$, oricare ar fi $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Invers, dacă $P_1P_2 = 0$, $|y\rangle \in \mathcal{K}_1$ şi $|z\rangle \in \mathcal{K}_2$, atunci $|y\rangle = P_1|y\rangle$, $|z\rangle = P_2|z\rangle$ şi avem

$$\langle y|z\rangle = \langle y|P_1^*P_2|z\rangle = \langle y|P_1P_2|z\rangle = 0.$$

3.11.12 Propoziţie. *Suma $P=P_1+\cdots+P_m$ a proiectorilor P_1, P_2, ..., P_m este un proiector dacă şi numai dacă ei sunt ortogonali doi câte doi.*

Demonstraţie. Dacă P_1, P_2, ..., $P_m : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sunt proiectori ortogonali, atunci

$$P^2=(P_1+\cdots+P_m)^2 = P_1+\cdots+P_m = P,$$

adică P este proiector. Invers, dacă P este proiector şi $i\neq j$, atunci (v pag. 146-**3**)

$$||P_ix||^2 + ||P_jx||^2 \leq \sum_{k=1}^{m} ||P_kx||^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle x|P_k|x\rangle = \langle x|P|x\rangle \leq \langle x|x\rangle = ||x||^2,$$

adică avem

$$||P_ix||^2 + ||P_jx||^2 \leq ||x||^2, \qquad \text{oricare ar fi} \quad |x\rangle \in \mathcal{H}.$$

Punând P_iy în loc de x, obţinem relaţia

$$||P_iy||^2 + ||P_jP_iy||^2 \leq ||P_iy||^2, \qquad \text{oricare ar fi} \quad |y\rangle \in \mathcal{H},$$

din care rezultă că

$$P_jP_iy = 0, \qquad \text{oricare ar fi} \quad |y\rangle \in \mathcal{H}.$$

3.11.13 Propoziţie. *Produsul $P=P_1P_2$ a doi proiectori $P_1, P_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este un proiector dacă şi numai dacă $P_1P_2 = P_2P_1$.*

Demonstraţie. Dacă $P=P_1P_2$ este proiector, atunci $P_1P_2=P=P^*=(P_1P_2)^*=P_2^*P_1^*=P_2P_1$. Dacă $P_1P_2=P_2P_1$, atunci $P^2=PP=P_1P_2P_1P_2=P_1^2P_2^2=P_1P_2=P$.

3.11.14 Dacă $P_1, P_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sunt proiectorii pe subspaţiile $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ şi dacă $P_1P_2=P_2P_1$, atunci $P=P_1P_2$ este proiectorul pe subspaţiul $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1\cap\mathcal{K}_2$.

3.11.15 Propoziţie. *Fie P_1, P_2 proiectorii corespunzători subspaţiilor $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$. Următoarele patru relaţii sunt echivalente:*

a) $P_1 \geq P_2$; c) $P_1P_2=P_2$;

b) $\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}_2$; d) $P_2P_1=P_2$.

Demonstraţie. a)⇒b). Dacă $|x\rangle \in \mathcal{K}_2$, atunci $x=P_2|x\rangle$. Din relaţia (v. pag. 146-**3**)

$$||x||^2 \geq ||P_1x||^2 = \langle x|P_1|x\rangle \geq \langle x|P_2|x\rangle = \langle x|x\rangle = ||x||^2$$

rezultă că $||P_1x||=||x||$, ceea ce este posibil numai dacă $P_1x=x$, adică $|x\rangle \in \mathcal{K}_1$.
b)⇒c). Fie $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Deoarece $P_2|x\rangle \in \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$, avem $P_1P_2|x\rangle = P_2|x\rangle$.

c)⇒d). Dacă $P_1P_2 = P_2$, atunci $P_2P_1 = P_2^*P_1^* = (P_1P_2)^* = P_2^* = P_2$.
d)⇒a). Fie $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Utilizând relaţiile $P_2^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^*$ şi $P_2 \leq I$, obţinem

$$\langle x|P_2|x\rangle = \langle x|P_2^*P_2|x\rangle = \langle x|P_1^*P_2^*P_2P_1|x\rangle = \langle x|P_1^*P_2P_1|x\rangle \leq \langle x|P_1^*P_1|x\rangle = \langle x|P_1|x\rangle.$$

3.11.16 Propoziţie. *Diferenţa $P = P_1 - P_2$ a doi proiectori $P_1, P_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este un proiector dacă şi numai dacă $P_1 \geq P_2$.*

Demonstraţie. Dacă $P = P_1 - P_2$ este proiector, atunci, pe baza propoziţiei precedente, din $P_1 = P + P_2$ rezultă că $(P_1 - P_2)P_2 = PP_2 = 0$, adică are loc relaţia $P_1P_2 = P_2$, echivalentă cu $P_1 \geq P_2$. Invers, dacă $P_1 \geq P_2$, adică $P_1P_2 = P_2 = P_2P_1$, atunci

$$P^2 = (P_1 - P_2)^2 - P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 = P.$$

3.11.17 Teoremă. *Orice operator autoadjunct A admite descompunerea spectrală*

$$A = \sum_i \mu_i P_i,$$

unde μ_i sunt valorile proprii ale lui A şi P_i sunt proiectorii ortogonali corespunzători care satisfac relaţiile

$$P_i^2 = P_i = P_i^* \qquad P_iP_j = \delta_{ij} P_i \qquad \sum_i P_i = I.$$

Demonstraţie. Ştim (v. pag. 138-**13**) că A se poate scrie sub forma

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|, \qquad \text{cu} \qquad \sum_{i=1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i| = I \quad \text{şi} \quad \langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$$

(unele valori λ_i pot să coincidă). Dacă A are doar două valori proprii distincte,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \mu_1, \qquad \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_n = \mu_2,$$

atunci A admite descompunerea

$$A = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$$

unde P_1, P_2 sunt proiectorii ortogonali

$$P_1 = |v_1\rangle\langle v_1| + \cdots + |v_k\rangle\langle v_k|, \qquad P_2 = |v_{k+1}\rangle\langle v_{k+1}| + \cdots + |v_n\rangle\langle v_n|$$

care satisfac relaţiile $P_1 + P_2 = I$ şi $P_1P_2 = 0$. În cazul mai multor valori proprii demonstraţia este similară.

3.11.18 Exemplu. Valorile proprii ale operatorului autoadjunct

$$A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \qquad A(x_1, x_2, x_3) = (x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+x_2)$$

sunt $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Subspaţiile proprii corespunzătoare

$$\mathcal{V}_2 = \{\, (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3 \,\} = \{\, (\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C} \,\}$$

$$\mathcal{V}_{-1} = \{\, (x_1, x_2, x_3) \mid x_1+x_2+x_3 = 0 \,\} = \{\, (\alpha, \beta, -\alpha-\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \,\}$$

sunt ortogonale. Notând cu P_2 şi P_{-1} proiectorii ortogonali corespunzători, avem

$$A = 2P_2 + (-1)P_{-1}.$$

În subspaţiul $\mathcal{V}_2$ o bază ortonormată este formată din vectorul $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Alegând în $\mathcal{V}_{-1}$ baza ortonormată

$$\left\{ v_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), v_3 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

rezultă

$$P_2 = |v_1\rangle\langle v_1|, \qquad P_{-1} = |v_2\rangle\langle v_2| + |v_3\rangle\langle v_3|,$$

adică

$$A = 2P_2 + (-1)P_{-1} = 2|v_1\rangle\langle v_1| - (\, |v_2\rangle\langle v_2| + |v_3\rangle\langle v_3| \,).$$

3.12 Transformări unitare şi ortogonale

3.12.1 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert. O *transformare unitară* în $\mathcal{H}$ este o aplicaţie liniară $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ cu proprietatea

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.12.2 Transformările unitare păstrează nemodificată norma vectorilor:

$$||Ax|| = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = ||x||, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

3.12.3 Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert bidimensional şi $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ o bază ortonormată fixată. Operatorul identitate I şi *operatorii Pauli*

$$\sigma_x = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \qquad \sigma_y = \mathrm{i}\,|1\rangle\langle 0| - \mathrm{i}\,|0\rangle\langle 1| \qquad \sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

sunt transformări unitare. *Transformarea Hadamard*

$$H:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}, \qquad H=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\langle 0|+\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\langle 1|$$

este o transformare unitară cu proprietăţile

$$H|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle), \qquad H|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle), \qquad H^2=I.$$

3.12.4 Propoziţie. *Fie $A,B:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ aplicaţii liniare.*
Dacă A este transformare unitară, atunci şi A^{-1} este transformare unitară.
Dacă A şi B sunt transformări unitare, atunci AB este transformare unitară.

Demonstraţie. Dacă A este transformare unitară, atunci $\ker A=\{0\}$

$$Ax=0 \quad\Longrightarrow\quad ||x||=||Ax||=0 \quad\Longrightarrow\quad x=0$$

şi conform teoremei dimensiunii

$$\dim \mathrm{Im}\, A=\dim\mathcal{H}-\dim \mathrm{Ker}\, A=\dim\mathcal{H}.$$

De aceea, A este o transformare bijectivă. Transformarea A^{-1} este unitară

$$\langle x,y\rangle=\langle A(A^{-1}x),A(A^{-1}y)\rangle=\langle A^{-1}x,A^{-1}y\rangle.$$

Dacă A şi B sunt transformări unitare, atunci

$$\langle (AB)x,(AB)y\rangle=\langle A(Bx),A(By)\rangle=\langle Bx,By\rangle=\langle x,y\rangle, \qquad \forall x,y\in\mathcal{H}.$$

3.12.5 Transformarea identitate

$$I:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}:\ x\mapsto x$$

este o transformare unitară şi compunerea aplicaţiilor este asociativă

$$(A(BC))x=A((BC)x)=A(B(Cx))=(AB)(Cx)=((AB)C)x, \qquad \forall x\in\mathcal{H}.$$

De aceea, mulţimea transformărilor unitare

$$\{\, A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}\mid\ \langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle,\ \ \forall x,y\in\mathcal{H}\,\}$$

are o structură naturală de grup (*grupul transformărilor unitare* ale lui $\mathcal{H}$).

3.12.6 Propoziţie. *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert şi $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ o aplicaţie liniară.*
Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) A *este transformare unitară;*

b) $A^*A=I$;

c) A *este bijectivă şi* $A^{-1} = A^*$.

Demonstraţie. Dacă A este transformare unitară, adică

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

atunci are loc relaţia

$$\langle A^*Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

care conduce la $A^*A = I$. Dacă $A^*A = I$, atunci $A^*AA^{-1} = A^{-1}$, adică $A^* = A^{-1}$. Dacă A este bijectivă şi $A^{-1} = A^*$, atunci

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle A^{-1}Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.12.7 Propoziţie. *O aplicaţie liniară* $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *este transformare unitară dacă şi numai dacă matricea ei în raport cu o bază ortonormată este o matrice unitară.*

Demonstraţie. Dacă $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este o bază ortonormată şi $Av_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}v_j$, atunci

$$\begin{aligned}\langle Av_i, Av_j\rangle &= \langle \textstyle\sum_{k=1}^n a_{ki}v_k, \sum_{m=1}^n a_{mj}v_m\rangle \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_{ki}\bar{a}_{mj}\langle v_k, v_m\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki}\bar{a}_{kj} = \sum_{k=1}^n a^*_{jk}a_{ki}.\end{aligned}$$

Dacă A este transformare unitară, atunci are loc relaţia

$$\sum_{k=1}^n a^*_{jk}a_{ki} = \langle Av_i, Av_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$$

echivalentă cu $A^*\,A = I$. Invers, dacă $A^*\,A = I$, atunci

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ay\rangle &= \left\langle A\left(\textstyle\sum_{i=1}^n x_iv_i\right), A\left(\sum_{j=1}^n y_jv_j\right)\right\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i\bar{y}_j\langle Av_i, Av_j\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i\bar{y}_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

3.12.8 Teoremă. *Dacă* $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *este transformare unitară, atunci:*

a) orice valoare proprie λ *verifică relaţia* $|\lambda| = 1$*;*

b) Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

Demonstraţie a) Fie λ o valoare proprie a lui A şi $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda u$. Din relaţia $\langle Au, Au\rangle = \langle u, u\rangle$ rezultă că $|\lambda| = 1$.

b) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ două valori proprii distincte, u_1, u_2 vectori proprii corespunzători, adică $Au_1 = \lambda_1u_1$ şi $Au_2 = \lambda_2u_2$. Din relaţia $\langle Au_1, Au_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$ rezultă că $\langle u_1, u_2\rangle = 0$.

3.12.9 Teoremă. *Dacă $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ este transformare unitară, atunci există o bază ortonormată $\mathfrak{B}$ în $\mathcal{H}$ astfel încât matricea lui A în raport cu $\mathfrak{B}$ este o matrice diagonală.*

Demonstraţie. Utilizăm metoda inducţiei matematice. Afirmaţia este evident adevărată dacă $\dim\mathcal{H}=1$. Presupunând că afirmaţia este adevărată în cazul $\dim\mathcal{H}=n-1$, arătăm că ea este adevărată şi dacă $\dim\mathcal{H}=n$. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu vectorial de dimensiune n şi $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ o transformare unitară. Fie $\lambda_1\in\mathbb{C}$ o valoare proprie şi $u\neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au=\lambda_1 u$. Vectorul unitar $v_1=\frac{u}{||u||}$ este de asemenea vector propriu corespunzător lui λ_1. Subspaţiul format din toţi vectorii ortogonali pe v_1

$$\mathcal{K}=\{v_1\}^{\perp}=\{\ x\in V\ \mid\ \langle v_1,x\rangle=0\ \}$$

este un subspaţiu invariant

$$x\in\mathcal{K}\ \Rightarrow\ \langle v_1,Ax\rangle=\lambda_1\langle\lambda_1 v_1,Ax\rangle=\lambda_1\langle Av_1,Ax\rangle=\lambda_1\langle v_1,x\rangle=0\ \Rightarrow\ Ax\in\mathcal{K}$$

de dimensiune $n-1$ şi $\text{span}\{v_1\}\oplus\mathcal{K}=\mathcal{H}$. Relaţia $\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle$ având loc pentru orice $x,y\in\mathcal{H}$, rezultă că restricţia lui A la $\mathcal{K}$

$$A|_{\mathcal{K}}:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$$

verifică relaţia $\langle A|_{\mathcal{K}}x,A|_{\mathcal{K}}y\rangle=\langle x,y\rangle$, oricare ar fi $x,y\in\mathcal{K}$, adică este transformare unitară. Conform ipotezei de inducţie, există o bază ortonormată $\{v_2,v_3,...,v_n\}$ în $\mathcal{K}$ astfel încât matricea lui $A|_{\mathcal{K}}$ este o matrice diagonală

$$A|_{\mathcal{K}}=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Sistemul de vectori $\mathfrak{B}=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ este bază ortonormată în $\mathcal{H}$ şi matricea lui A în această bază este o matrice diagonală

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

3.12.10 Teoremă. *Orice operator unitar A admite descompunerea spectrală*

$$A=\sum_i \mu_i P_i,$$

unde μ_i sunt valorile proprii şi P_i sunt proiectorii ortogonali corespunzători cu proprietăţile

$$P_i^2 = P_i = P_i^* \qquad P_i P_j = \delta_{ij}\, P_i \qquad \sum_i P_i = I.$$

Demonstraţie. Este similară demonstraţiei prezentate la pag. 150-**17**.

3.12.11 Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un subspaţiu vectorial al spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$. Orice operator unitar $U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}$ se poate prelungi până la un operator unitar $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$.*

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ o bază ortonormată în $\mathcal{K}$ pe care o extindem până la o bază $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ în $\mathcal{H}$. Sistemul ortonormat

$$w_1 = Uv_1, \quad w_2 = Uv_2, \ \ldots\ , \ w_k = Uv_k$$

il extindem până la o bază $\{w_1, ..., w_k, w_{k+1}, ..., w_n\}$ în $\mathcal{H}$. Operatorul $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$,

$$Uv_j = w_j, \qquad \text{oricare ar fi } \ j \in \{1, 2, ..., k, k+1, ..., n\},$$

este o extensie unitară a operatorului unitar $U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}$.

3.12.12 Există un analog real al noţiunii de transformare unitară, dar nu toate proprietăţile prezentate în cazul complex se păstrează în cazul real.

3.12.13 Definiţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert real. O *transformare ortogonală* în $\mathcal{H}$ este o aplicaţie liniară $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ cu proprietatea

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.12.14 Transformările ortogonale păstrează nemodificată norma vectorilor. Mulţimea transformărilor ortogonale

$$\{\, A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \mid \ \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \ \ \forall x, y \in \mathcal{H} \,\}$$

are o structură naturală de grup (*grupul transformărilor ortogonale*).

3.12.15 Propoziţie. *O aplicaţie liniară $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este transformare ortogonală dacă şi numai dacă matricea ei in raport cu o bază ortonormată este o matrice ortogonală.*

3.12.16 Teoremă. *Dacă $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este o transformare ortogonală, atunci:*
a) singurele valori proprii posibile ale lui A sunt 1 şi -1;
b) vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

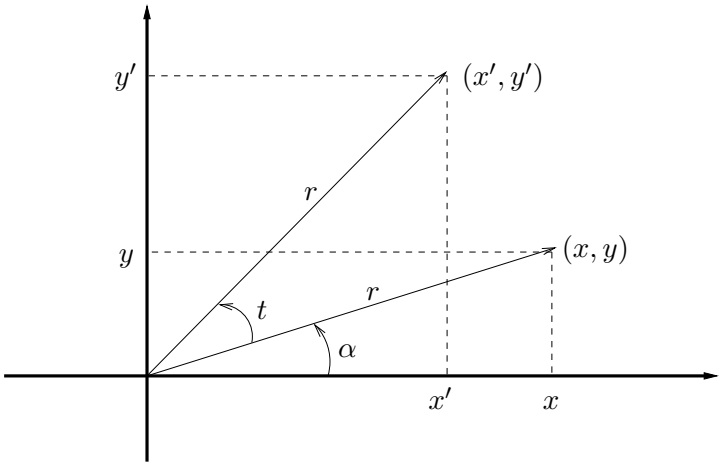

Figura 3.8: Rotaţia de unghi t în jurul originii.

3.12.17 Exerciţiu. Dacă identificăm planul cu spaţiul Hilbert real $\mathbb{R}^2$, atunci rotaţia R_t de unghi t în jurul originii este transformare ortogonală. Arătaţi că, în general, R_t nu admite nicio valoare sau vector propriu.

Soluţie. Notând $r = \sqrt{x^2+y^2}$ şi punând (v. Fig. 3.8)

$$\mathcal{R}_t(x, y) = (x', y'),$$

obţinem

$$x' = r\,\cos(\alpha + t) = r\,\cos\alpha\,\cos t - r\,\sin\alpha\,\sin t = x\,\cos t - y\,\sin t,$$
$$y' = r\,\sin(\alpha + t) = r\,\cos\alpha\,\sin t + r\,\sin\alpha\,\cos t = x\,\sin t + y\,\cos t,$$

adică

$$\mathcal{R}_t(x, y) = (x\,\cos t - y\,\sin t,\, x\,\sin t + y\,\cos t).$$

Matricea rotaţiei $\mathcal{R}_t$ în raport cu baza canonică este

$$\mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\begin{vmatrix} \cos t - \lambda & -\sin t \\ \sin t & \cos t - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sunt

$$\lambda_{1,2} = \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - 1}$$

şi ele sunt reale dacă şi numai dacă $\cos t \in \{-1, 1\}$, adică dacă şi numai dacă $t \in \mathbb{Z}\pi$.

3.12.18 *Rotaţia $\mathcal{R}(t)$ de unghi t în jurul unui vector unitar $v \in \mathbb{R}^3$.*

Fie (v_1, v_2, v_3) coordonatele lui v în raport cu baza canonică

$$\mathfrak{B} = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}.$$

În cazurile $v = e_3$ şi $v = -e_3$, matricea lui $\mathcal{R}_t$ în raport cu baza $\mathfrak{B}$ este

$$\mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi respectiv} \quad \mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În cazul $v \neq \pm e_3$, deoarece

$$v \times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (v_2, -v_1, 0)$$

şi

$$v \times (v \times e_3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (v_1 v_3, v_2 v_3, -v_1^2 - v_2^2)$$

sistemul de vectori

$$\mathfrak{B}' = \left\{ e_1' = \frac{(v_2, -v_1, 0)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},\ e_2' = \frac{(v_1 v_3, v_2 v_3, -v_1^2 - v_2^2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},\ e_3' = (v_1, v_2, v_3) \right\}$$

este o bază ortonormată. Matricea de trecere de la $\mathfrak{B}$ la $\mathfrak{B}'$ este

$$S = \begin{pmatrix} \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} & \frac{v_1 v_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} & v_1 \\ \frac{-v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} & \frac{v_2 v_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} & v_2 \\ 0 & \frac{-v_1^2-v_2^2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} & v_3 \end{pmatrix}$$

iar matricea de trecere de la $\mathfrak{B}'$ la $\mathfrak{B}$ este ${}^tS$. Matricea rotaţiei de unghi t în jurul lui v în raport cu baza $\mathfrak{B}'$ este

$$\mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea aceleiaşi rotaţii în raport cu baza canonică $\mathfrak{B}$ este

$$S\,\mathcal{R}_t\,{}^tS = S \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tS.$$

Se observă că

$$S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

şi prin urmare

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^tS \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

În particular, avem

$$S\,\mathcal{R}_t\,{}^tS \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

adică

$$S\,\mathcal{R}_t\,{}^tS\,v = v.$$

3.12.19 În cazul unei transformări ortogonale $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, în general, nu există o bază $\mathfrak{B}$ astfel încât matricea lui A în raport cu $\mathfrak{B}$ să fie una diagonală.

3.13 Transformarea Fourier finită

3.13.1 Definiţie. Spunem despre o funcţie de variabilă discretă

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

că este *periodică* cu perioada N dacă

$$\varphi(n+N) = \varphi(n), \qquad \text{oricare ar fi} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3.13.2 Oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$, funcţia exponenţială

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} : \ n \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \tag{3.14}$$

este o funcţie periodică cu perioada N deoarece

$$\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k(n+N)} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn}.$$

Am utilizat relaţia

$$\mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}} = \cos 2k\pi + \mathrm{i} \sin 2k\pi = 1.$$

Deoarece $\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}(k+N)n} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn}$, există numai N funcţii de forma (3.14).

3.13.3 Orice funcţie

$$\varphi : \{0, 1, ..., N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate prelungi prin periodicitate până la o funcţie periodică

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioada N, şi orice funcţie periodică $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada N este complet determinată de restricţia ei la mulţimea $\{0, 1, ..., N-1\}$, adică de numerele $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ... , $\varphi(N-1)$. Deoarece

$$... = \varphi(n-2N) = \varphi(n-N) = \varphi(n) = \varphi(n+N) = \varphi(n+2N) = ...$$

funcţia φ poate fi considerată ca fiind definită pe mulţimea $\mathbb{Z}_N$ a claselor de resturi modulo N, adică

$$\varphi : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}.$$

3.13.4 Teoremă. *Dacă* $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ *este funcţie periodică cu perioada* N, *atunci*

$$\varphi(n) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m) \tag{3.15}$$

$$\varphi(n) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m). \tag{3.16}$$

Demonstraţie. Din formula (suma seriei geometrice)

$$\sum_{m=0}^{N-1} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad q = 1, \\ \frac{1-q^N}{1-q} & \text{dacă} \quad q \neq 1, \end{cases} \tag{3.17}$$

rezultă relaţia

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} m(n-k)} = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} (n-k)} \right)^m = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad k \equiv n \,(\text{modulo}\, N), \\ 0 & \text{dacă} \quad k \not\equiv n \,(\text{modulo}\, N), \end{cases}$$

care conduce la

$$\tfrac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nm} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} mk} \varphi(k) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} m(n-k)} \right) \varphi(k) = \varphi(n).$$

3.13.5 Ştim că orice funcţie periodică continuă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada T

$$f(t+T) = f(t), \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in \mathbb{R},$$

cu derivata continuă pe porţiuni, este dezvoltabilă în serie Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T} kt} \qquad \text{cu} \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{T} kt} \, f(t) \, dt. \tag{3.18}$$

Din (3.15) rezultă că $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, periodică cu perioada N, admite reprezentarea

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \qquad \text{cu} \qquad c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m). \tag{3.19}$$

3.13.6 Definiţie. *Transformata Fourier* a funcţiei periodice

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioada N este funcţia

$$F[\varphi] : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n). \tag{3.20}$$

Transformata Fourier inversă a lui φ este funcţia

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n). \quad (3.21)$$

3.13.7 Transformatele Fourier $F[\varphi]$ şi $F^{-1}[\varphi]$ sunt funcţii periodice cu perioada N

$$F[\varphi](k+N) = F[\varphi](k), \qquad F^{-1}[\varphi](k+N) = F^{-1}[\varphi](k)$$

şi

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi, \qquad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi.$$

3.13.8 În cazul $N=2$, transformata Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{2} kn} \varphi(n) = \sum_{n=0}^{1} (-1)^{kn} \varphi(n),$$

adică funcţia

$$F[\varphi] : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \begin{array}{l} F[\varphi](0) = \varphi(0) + \varphi(1), \\ F[\varphi](1) = \varphi(0) - \varphi(1). \end{array}$$

Transformata inversă este

$$F^{-1}[\varphi] : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \begin{array}{l} F^{-1}[\varphi](0) = \frac{1}{2}(\varphi(0)+\varphi(1)), \\ F^{-1}[\varphi](1) = \frac{1}{2}(\varphi(0)-\varphi(1)). \end{array}$$

3.13.9 În cazul $N=3$ avem

$$\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3} kn} = \left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\right)^{kn} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad kn \in 3\mathbb{Z}, \\ -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{dacă} \quad kn \in 3\mathbb{Z}+1, \\ -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{dacă} \quad kn \in 3\mathbb{Z}+2, \end{cases}$$

şi prin urmare transformata Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0,1,2\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \{0,1,2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{2} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3} kn} \varphi(n),$$

adică avem

$$F[\varphi](0) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2),$$
$$F[\varphi](1) = \varphi(0) + \left(-\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi(1) + \left(-\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi(2),$$
$$F[\varphi](2) = \varphi(0) + \left(-\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi(1) + \left(-\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\varphi(2).$$

Ultimele relaţii se mai pot scrie

$$\begin{pmatrix} F[\varphi](0) \\ F[\varphi](1) \\ F[\varphi](2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix}.$$

3.13.10 În cazul $N=4$, transformata Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{3} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{4} kn} \varphi(n) = \sum_{n=0}^{3} (-\mathrm{i})^{kn} \varphi(n),$$

adică avem

$$F[\varphi](0) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3),$$
$$F[\varphi](1) = \varphi(0) - \mathrm{i}\varphi(1) - \varphi(2) + \mathrm{i}\varphi(3),$$
$$F[\varphi](2) = \varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(2) - \varphi(3),$$
$$F[\varphi](3) = \varphi(0) + \mathrm{i}\varphi(1) - \varphi(2) - \mathrm{i}\varphi(3).$$

3.13.11 Exerciţiu. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$\varphi : \{0,1,...,N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(n) = a^n,$$

unde $a \in \mathbb{C}$ este fixat.

Rezolvare. Utilizând formula (3.17) obţinem

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} a^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(a\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k}\right)^n = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad a = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k}, \\ \frac{1-a^N}{1-a\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k}} & \text{dacă} \quad a \neq \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k}. \end{cases}$$

3.13.12 Exerciţiu. Fie $m \in \{0,1,...,N-1\}$ fixat şi *funcţia delta discretă*

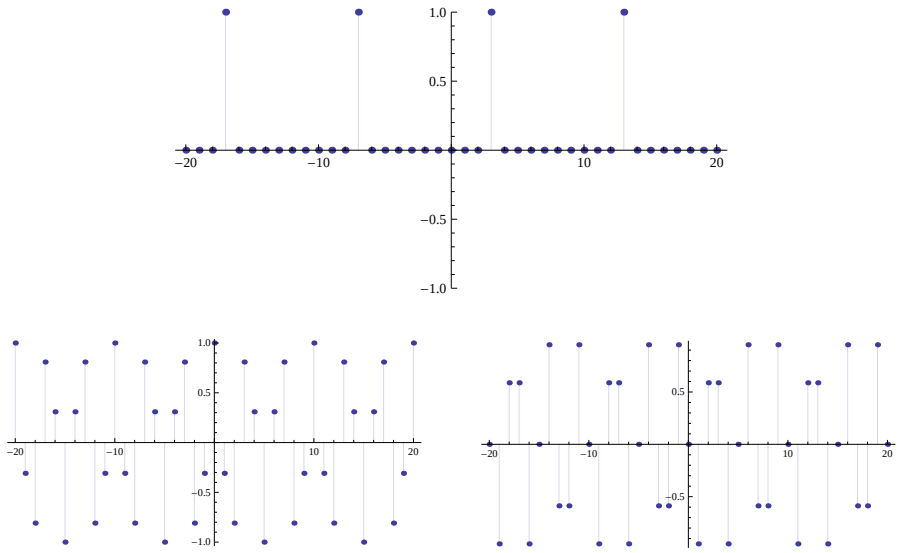

Figura 3.9: Funcţia δ_3, partea reală $\mathfrak{Re}\, F[\delta_3]=\cos\frac{6\pi \mathrm{i}}{N}m$ (stânga) şi partea imaginară $\mathfrak{Im}\, F[\delta_3]=\sin\frac{6\pi \mathrm{i}}{N}m$ a transformatei Fourier $F[\delta_3]$ în cazul $N=10$.

$$\delta_m:\{0,1,...,N-1\}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \delta_m(n)=\begin{cases}1 & \text{dacă} \quad n=m\\ 0 & \text{dacă} \quad n\neq m.\end{cases}$$

Să se arate că

$$F[\delta_m](k)=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}km}.$$

Rezolvare. Avem

$$F[\delta_m](k)=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}kn}\delta_m(n)=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}km}=\cos\tfrac{2\pi \mathrm{i}}{N}km+\mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi \mathrm{i}}{N}km.$$

Scriind δ în loc de δ_0, avem

$$F[\delta](k)=1,\qquad F[\delta_1](k)=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}k},\qquad F[\delta_2](k)=\mathrm{e}^{-\frac{4\pi \mathrm{i}}{N}k},\ ...$$

3.13.13 Spaţiul funcţiilor $\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{C}$, periodice cu perioada N, este un spaţiu Hilbert cu produsul scalar

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}\overline{\varphi(n)}\,\psi(n),$$

iar $\{\delta,\delta_1,\delta_2,...,\delta_{N-1}\}$ este bază ortonormată.

3.13.14 Oricare ar fi $j \in \mathbb{Z}$, avem

$$e^{\frac{2\pi i}{N}kn} = e^{\frac{2\pi i}{N}(k+jN)n} = e^{\frac{2\pi i}{N}k(n+jN)}.$$

De aceea, în relaţiile (3.20) şi (3.21), putem considera că n parcurge mulţimea $\mathbb{Z}_N$. Astfel, transformata Fourier a funcţiei $\varphi : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$ este funcţia

$$F[\varphi] : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\varphi](k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_N} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(n),$$

iar transformata Fourier inversă este funcţia

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}_N} e^{\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(n).$$

3.13.15 Oricare ar fi $n_0 \in \mathbb{Z}$, au loc relaţiile

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(n) \qquad \text{şi} \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N}\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(n).$$

3.13.16 În cazul în care $N = 2M+1$ este impar, mulţimea

$$\{-M, -M+1, ..., M-1, M\}$$

este sistem de reprezentanţi pentru $\mathbb{Z}_N$ şi prin urmare

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=-M}^{M} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(n), \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \tfrac{1}{N}\sum_{n=-M}^{M} e^{\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(n).$$

Dacă funcţia reală

$$\varphi : \{-M, -M+1, ..., M-1, M\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

este pară, adică

$$\varphi(-n) = \varphi(n), \qquad \text{oricare ar fi } \; n \in \{-M, -M+1, ..., M-1, M\},$$

atunci, utilizând schimbarea $n \mapsto -n$, obţinem

$$\begin{aligned} F[\varphi](k) &= \sum_{n=-M}^{M} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(n) = \sum_{n=-M}^{M} e^{\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(-n) \\ &= \sum_{n=-M}^{M} e^{\frac{2\pi i}{N}kn}\varphi(n) = \overline{F[\varphi](k)}, \end{aligned}$$

adică transformata Fourier $F[\varphi]$ este funcţie reală.

3.13.17 În cazul în care $N=2M+1$ este impar, relaţia (3.15) devine

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{M} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{k=-M}^{M} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m). \tag{3.22}$$

Această relaţie, scrisă sub forma

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{M} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \; F[\varphi](k), \tag{3.23}$$

poate fi privită ca o reconstrucţie a lui φ plecând de la valorile lui $F[\varphi]$. Dacă numărul întreg L este astfel încât $0 < L < M$, atunci funcţia

$$\varphi_L(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^{L} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \; F[\varphi](k) \tag{3.24}$$

este o aproximaţie a lui φ, obţinută folosind doar $F[\varphi](k)$ cu $-L \leq k \leq L$. Astfel de aproximaţii sunt utilizate pentru compresia datelor în descrierea digitală a sunetelor sau imaginilor.

Trecerea $\varphi \mapsto \varphi_L$ poate fi utilizată pentru filtrarea semnalelor (eliminarea unor zgomote) şi pentru prelucrarea imaginilor (eliminarea unor defecte).

3.13.18 În cazul general $N \in \{2, 3, 4, ...\}$, funcţia φ poate fi aproximată utilizând

$$\varphi_L(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^{L} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} F[\varphi](k) \tag{3.25}$$

cu $L \in \{1, 2, ...\}$ ales astfel încât $2L+1 \leq N$. Dacă φ este funcţie reală atunci utilizând schimbarea $k \mapsto -k$ obţinem relaţia

$$\begin{aligned} \varphi_L(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^{L} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^{L} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} nk} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} km} \varphi(m) = \overline{\varphi_L(n)} \end{aligned}$$

care arată că φ_L este funcţie reală.

3.13.19 În figura 3.10 prezentăm funcţia periodică

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu perioada $N=20$ definită prin

$$\varphi(n) = (n/10)^2 \qquad \text{pentru} \quad -10 \leq n \leq 9$$

şi funcţia periodică

$$\varphi_3(n) = \frac{1}{20} \sum_{k=-3}^{3} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{20} nk} F[\varphi](k).$$

Funcţia φ_3 este o aproximaţie a lui φ deoarece

$$\varphi(n) = \frac{1}{20} \sum_{k=-10}^{9} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{20} nk} F[\varphi](k).$$

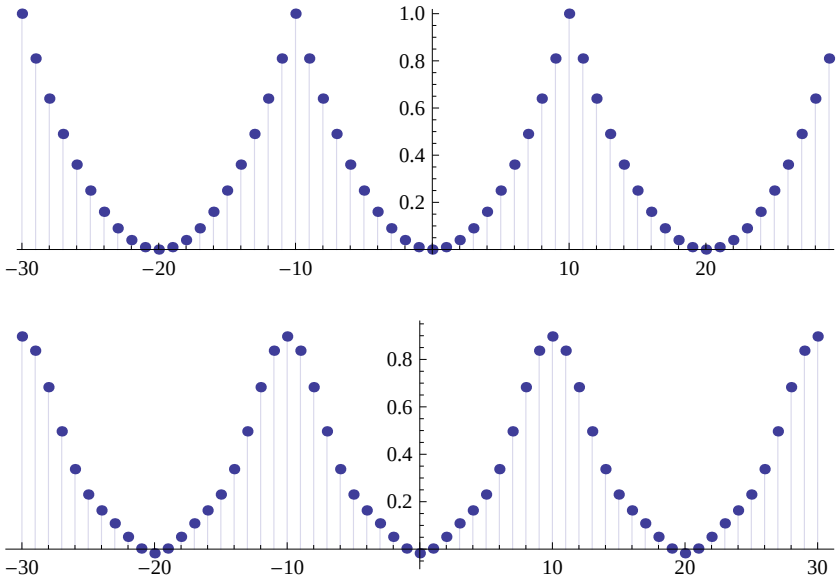

Figura 3.10: Funcţiile φ şi φ_3.

3.13.20 În cazul în care perioada este un număr par $2N$, unei funcţii

$$\varphi : \{0, 1, ..., 2N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

îi putem asocia funcţiile

$$\begin{aligned} &\varphi_{par} : \{0, 1, ..., N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, && \varphi_{par}(n) = \varphi(2n), \\ &\varphi_{impar} : \{0, 1, ..., N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, && \varphi_{impar}(n) = \varphi(2n+1), \end{aligned}$$

şi avem

$$\begin{aligned}
F[\varphi](k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{2N} kn} \varphi(n) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{2N} k\, 2m} \varphi(2m) + \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{2N} k\,(2m+1)} \varphi(2m+1), \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k\, m} \varphi_{par}(m) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{N} k} \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k\, m} \varphi_{impar}(m) \\
&= \begin{cases} F[\varphi_{par}](k) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{N} k} F[\varphi_{impar}](k) & \text{dacă} \quad k \in \{0, 1, ..., N-1\} \\ F[\varphi_{par}](k-N) + \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{N} k} F[\varphi_{impar}](k-N) & \text{dacă} \quad k \in \{N, N+1, ..., 2N-1\}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Utilizând formula obţinută, calculul transformatelor Fourier ale funcţiilor de forma

$$\varphi : \{0, 1, ..., 2^N - 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate reduce succesiv până la calculul transformatelor unor funcţii de forma

$$\psi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Această metodă de calcul foarte eficientă este numită *transformarea Fourier rapidă.*

3.13.21 Ştim că în cazul $N = 2$, transformata Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia

$$F[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \begin{aligned} F[\varphi](0) &= \varphi(0) + \varphi(1), \\ F[\varphi](1) &= \varphi(0) - \varphi(1). \end{aligned}$$

3.13.22 Calculul transformatei Fourier a unei funcţii

$$\varphi : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate reduce la calculul transformatelor Fourier ale funcţiilor

$$\begin{aligned} &\varphi_{par} : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, && \varphi_{par}(n) = \varphi(2n), \\ &\varphi_{impar} : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, && \varphi_{impar}(n) = \varphi(2n+1). \end{aligned}$$

Avem

$$F[\varphi](k)=\begin{cases} F[\varphi_{par}](k)+\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}k}F[\varphi_{impar}](k) & \text{dacă} \quad k\in\{0,1\},\\ F[\varphi_{par}](k-2)+\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}k}F[\varphi_{impar}](k-2) & \text{dacă} \quad k\in\{2,3\}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3) & \text{dacă} \quad k=0,\\ \varphi(0)-\mathrm{i}\varphi(1)-\varphi(2)+\mathrm{i}\varphi(3) & \text{dacă} \quad k=1,\\ \varphi(0)-\varphi(1)+\varphi(2)-\varphi(3) & \text{dacă} \quad k=2,\\ \varphi(0)+\mathrm{i}\varphi(1)-\varphi(2)-\mathrm{i}\varphi(3) & \text{dacă} \quad k=3.\end{cases}$$

3.13.23 În cazul $N=2^3$, unei funcţii de forma

$$\varphi:\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\longrightarrow\mathbb{C},$$

funcţiilor

$$\varphi_{par}:\{0,1,2,3\}\longrightarrow\mathbb{C}, \qquad \varphi_{par}(n)=\varphi(2n),$$
$$\varphi_{impar}:\{0,1,2,3\}\longrightarrow\mathbb{C}, \qquad \varphi_{impar}(n)=\varphi(2n+1)$$

li se poate aplica direct formula obţinută la punctul anterior.

3.13.24 Spaţiul funcţiilor periodice $\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{C}$ cu perioada N se poate identifica cu $\mathbb{C}^N$ asociind funcţiei φ elementul $x=(x_0,...,x_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ cu $x_n=\varphi(n)$. Obţinem în acest fel transformarea Fourier pe $\mathbb{C}^N$, adică

$$F:\mathbb{C}^N\longrightarrow\mathbb{C}^N:x\mapsto F[x], \qquad \text{unde} \quad F[x]_k=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}kn}x_n$$

şi inversa ei

$$F^{-1}:\mathbb{C}^N\longrightarrow\mathbb{C}^N:x\mapsto F^{-1}[x], \quad \text{unde} \quad F^{-1}[x]_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}kn}x_n.$$

3.13.25 Definiţie. O matrice de forma

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{d-1}\\ c_{d-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{d-2}\\ c_{d-2} & c_{d-1} & c_0 & \cdots & c_{d-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0\end{pmatrix} \tag{3.26}$$

se numeşte *matrice circulantă*.

3.13.26 Teoremă. *Valorile proprii ale matricei (3.26) sunt coordonatele transformatei Fourier ale primei linii, adică*

$$\lambda_k = \sum_{n=0}^{d-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} kn} c_n \qquad cu \quad k \in \{0, 1, ..., d-1\},$$

iar vectorii proprii corespunzători sunt

$$v_k = {}^t\left(1, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} k}, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} 2k}, ..., \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}(d-1)k}\right).$$

Demonstraţie. Coordonata j a lui Cv_k este

$$(Cv_k)_j = \sum_{\ell=0}^{d-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} k\ell} c_{d-j+\ell} = \sum_{n=0}^{d-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} k(n+j)} c_n = \lambda_k \, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} kj}.$$

3.14 Transformarea Fourier finită bidimensională

3.14.1 Fie $N_1, N_2 \in \{2, 3, 4, ...\}$. Dacă $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$, atunci funcţia

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(n_1, n_2) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_1} k_1 n_1} \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_2} k_2 n_2}, \tag{3.27}$$

este o funcţie periodică cu perioadele $(N_1, 0)$ şi $(0, N_2)$, adică

$$\varphi(n_1, n_2) = \varphi(n_1 + N_1, n_2) = \varphi(n_1, n_2 + N_2), \qquad \forall (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \tag{3.28}$$

Dacă în (3.27) înlocuim k_1 cu $k_1 + N_1$ sau $k_2 + N_2$, atunci φ nu se schimbă. Dintre funcţiile (3.27) doar $N_1 N_2$ sunt distincte şi ele pot fi descrise utilizând clase de resturi ca fiind cele corespunzătoare lui $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}$.
Un sistem de reprezentanţi pentru $\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}$ este $\{0, ..., N_1 - 1\} \times \{0, ..., N_2 - 1\}$.

3.14.2 Funcţiile periodice

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioadele $(N_1, 0)$ şi $(0, N_2)$ se pot identifica cu funcţiile

$$\varphi : \{0, 1, ..., N_1 - 1\} \times \{0, 1, ..., N_2 - 1\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

iar în cazul în care $N_1 = 2M_1 + 1$ şi $N_2 = 2M_2 + 1$ sunt impare cu

$$\varphi : \{-M_1, -M_1 + 1, ..., M_1\} \times \{-M_2, -M_2 + 1, ..., M_2\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Din relaţia (3.28) rezultă că putem considera φ definită pe $\mathbb{Z}_{N_1}\times\mathbb{Z}_{N_2}$, adică

$$\varphi : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

3.14.3 Teoremă.

Dacă $\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ *este periodică cu perioadele* $(N_1, 0)$ *şi* $(0, N_2)$*, atunci*

$$\varphi(n_1,n_2)=\tfrac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}n_1k_1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}n_2k_2}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1m_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2m_2}\varphi(m_1,m_2),$$

$$\varphi(n_1,n_2)=\tfrac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}n_1k_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}n_2k_2}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1m_1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2m_2}\varphi(m_1,m_2).$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă direct din teorema prezentată la pag. 160-**4**.

3.14.4 Definiţie.

Transformata Fourier a funcţiei periodice

$$\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioadele $(N_1, 0)$ şi $(0, N_2)$ este funcţia

$$F[\varphi] : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k_1,k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1n_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2n_2}\varphi(n_1,n_2).$$

Transformata Fourier inversă a lui φ este funcţia

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F^{-1}[\varphi](k_1,k_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1n_1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2n_2}\varphi(n_1,n_2).$$

3.14.5 Transformatele Fourier ale funcţiilor periodice cu perioadele $(N_1, 0)$ şi $(0, N_2)$ sunt funcţii periodice cu aceleaşi perioade,

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi \qquad \text{şi} \qquad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi.$$

Astfel, transformata Fourier a funcţiei

$$\varphi : \mathbb{Z}_{N_1}\times\mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia $F[\varphi] : \mathbb{Z}_{N_1}\times\mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită prin relaţia

$$F[\varphi](k_1,k_2) = \sum_{n_1\in\mathbb{Z}_{N_1}}\sum_{n_2\in\mathbb{Z}_{N_2}}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1n_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2n_2}\varphi(n_1,n_2),$$

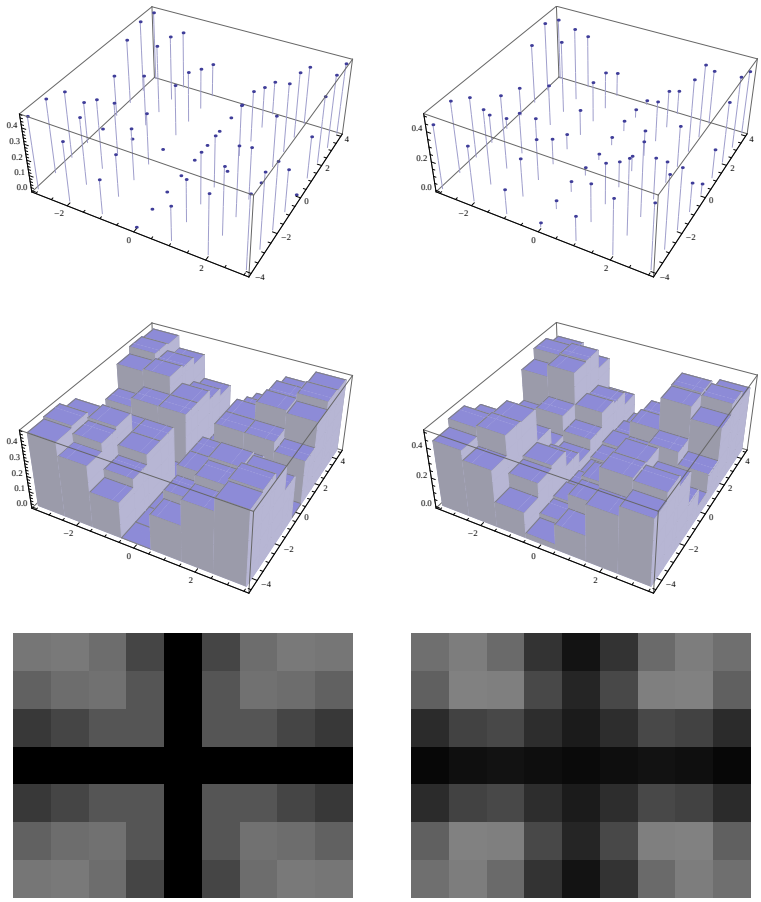

Figura 3.11: Funcţiile φ (stânga) şi $\varphi_{2,2}$ (dreapta) în diverse reprezentări grafice.

iar transformata Fourier inversă funcţia $F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$F^{-1}[\varphi](k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_1} k_1 n_1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2).$$

3.14.6 În cazul în care $N_1 = 2M_1 + 1$ şi $N_2 = 2M_2 + 1$ sunt impare, din teorema prezentată la pag. 170-**3** rezultă că

$$\varphi(n_1,n_2)=\tfrac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=-M_1}^{M_1}\sum_{k_2=-M_2}^{M_2}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}n_1k_1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}n_2k_2}$$
$$\times\sum_{m_1=-M_1}^{M_1}\sum_{m_2=-M_2}^{M_2}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}k_1m_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}k_2m_2}\varphi(m_1,m_2).$$

Această relaţie, scrisă sub forma

$$\varphi(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-M_1}^{M_1}\sum_{k_2=-M_2}^{M_2}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}n_1k_1}\ \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}n_2k_2}\ F[\varphi](k_1,k_2).$$

poate fi privită ca o reconstrucţie a lui φ plecând de la valorile lui $F[\varphi]$. Dacă L_1, L_2 sunt astfel încât $0<L_1<M_1$ şi $0<L_2<M_2$, atunci funcţia

$$\varphi_{L_1,L_2}(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-L_1}^{L_1}\sum_{k_2=-L_2}^{L_2}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_1}n_1k_1}\ \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N_2}n_2k_2}\ F[\varphi](k_1,k_2)$$

este o aproximaţie a lui φ, obţinută folosind doar $F[\varphi](k)$ cu $-L_i\le k_i\le L_i$. Astfel de aproximaţii sunt utilizate pentru compresia datelor şi prelucrarea imaginilor (eliminarea unor defecte).

3.14.7 În figura 3.11 prezentăm în diverse reprezentari grafice funcţiile

$$\varphi,\ \varphi_{2,2}:\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\times\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}\longrightarrow\mathbb{R}$$

definite prin

$$\varphi(n_1,n_2)=\frac{|n_1n_2|}{n_1^2+n_2^2+1}$$

şi

$$\varphi_{2,2}(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-2}^{2}\sum_{k_2=-2}^{2}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{7}n_1k_1}\ \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{9}n_2k_2}\ F[\varphi](k_1,k_2),$$

unde

$$F[\varphi](k_1,k_2)=\tfrac{1}{12}\sum_{m_1=-3}^{3}\sum_{m_2=-4}^{4}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{7}k_1m_1}\ \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{9}k_2m_2}\ \varphi(m_1,m_2).$$

3.14.8 **MATHEMATICA**: Programul utilizat pentru a obţine Fig. 3.11

```
In[1]=  M1 = 3; M2 = 4; N1 = 2 M1 + 1; N2 = 2 M2 + 1
        f[n_, k_] := N[Abs[n k]/(n^2 + k^2 + 1)]
        Ff[n_, k_] :=  N[(1/(N1  N2)) Sum[Exp[2 Pi I a n/N1]
                        Exp[2 Pi I b k/N2] f[a, b], {a,-M1, M1}, {b,-M2, M2}]]
        g[n_, k_] :=  N[Re[Sum[Ff[a, b] Exp[-2 Pi I a n/N1]
                         Exp[-2 Pi I b k/N2], {a,-2,2}, {b,-2, 2}]]]
        DiscretePlot3D[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}]
        DiscretePlot3D[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}]
        DiscretePlot3D[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}, ExtentSize -> Full]
        DiscretePlot3D[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}, ExtentSize -> Full]
        Image[Table[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}] ]
        Image[Table[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}] ]
```

3.15 Transformarea Fourier unitară

3.15.1 Din relaţiile (3.15) şi (3.15) rezultă că pentru transformarea Fourier, în afară de (3.20), se poate alege şi *definiţia uşor diferită*

$$F[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n). \tag{3.29}$$

În acest caz, transformarea inversă este

$$F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \varphi(n).$$

3.15.2 Transformarea Fourier (3.29) este o transformare unitară deoarece matricea

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} 2} & \cdots & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}(N-1)} \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} 2} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} 4} & \cdots & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} 2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}(N-1)} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} 2(N-1)} & \cdots & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

a lui F în raport cu baza ortonormată $\{\delta, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_{N-1}\}$ este unitară

$$\tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} mn} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad k = m \text{ (modulo } N), \\ 0 & \text{dacă} \quad k \neq m \text{ (modulo } N). \end{cases}$$

Prin urmare, în cazul *transformării Fourier unitare* (3.29), avem

$$F^{-1} = F^*.$$

3.15.3 În cazul $N=2$, transformata Fourier unitară a unei funcţii

$$\varphi : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcţia (v. pag. 161-**8**)

$$F[\varphi] : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \begin{aligned} F[\varphi](0) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(0)+\varphi(1)), \\ F[\varphi](1) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(0)-\varphi(1)), \end{aligned}$$

şi ea coincide cu transformata inversă

$$F^{-1}[\varphi] : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \begin{aligned} F^{-1}[\varphi](0) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(0)+\varphi(1)), \\ F^{-1}[\varphi](1) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(0)-\varphi(1)). \end{aligned}$$

3.15.4 Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert de dimensiune N şi $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, ..., |v_{N-1}\rangle\}$ o bază ortonormată în $\mathcal{H}$. Asociind vectorului

$$|x\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |v_n\rangle\langle v_n|x\rangle$$

funcţia

$$\varphi : \{0,1,2,...,N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(n) = \langle v_n|x\rangle,$$

obţinem o identificare a spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$ cu spaţiul Hilbert al funcţiilor periodice cu perioada N. Prin acestă identificare, definiţia (3.29) corespunde relaţiei

$$\langle v_k|F|x\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \langle v_n|x\rangle.$$

Utilizând rezoluţia identităţii

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} |v_k\rangle\langle v_k|,$$

obţinem că

$$F|x\rangle = I\,F|x\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |v_k\rangle\langle v_k|F|x\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} |v_k\rangle\langle v_n|x\rangle,$$

oricare ar fi $|x\rangle \in \mathcal{H}$, adică formula

$$F = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} |v_k\rangle\langle v_n|. \tag{3.30}$$

3.15.5 Din relaţia (3.30) rezultă

$$F^2 = \tfrac{1}{N} \sum_{k,n=0}^{N-1} \sum_{j,\ell=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} kn} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} j\ell} |v_k\rangle\langle v_n|v_j\rangle\langle v_\ell|$$
$$= \tfrac{1}{N} \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} n(k+\ell)} |v_k\rangle\langle v_\ell| = \sum_{k=0}^{N-1} |v_k\rangle\langle v_{-k}|.$$

Deoarece

$$F^4 = \sum_{n,k=0}^{N-1} |v_n\rangle\langle v_{-n}|v_k\rangle\langle v_{-k}| = \sum_{n=0}^{N-1} |v_n\rangle\langle v_n| = I,$$

orice valoare proprie λ a lui F satisface relaţia

$$\lambda^4 = 1,$$

adică aparţine mulţimii $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Pentru $N > 4$, toate cele patru numere sunt valori proprii şi operatorii

$$P_0 = \tfrac{1}{4}(I + F + F^2 + F^3), \qquad P_1 = \tfrac{1}{4}(I + \mathrm{i}F - F^2 - \mathrm{i}F^3),$$
$$P_2 = \tfrac{1}{4}(I - F + F^2 - F^3), \qquad P_3 = \tfrac{1}{4}(I - \mathrm{i}F - F^2 + \mathrm{i}F^3),$$

care satisfac relaţiile

$$P_k^* = P_k, \qquad P_k P_\ell = \delta_{k\ell}\, P_k, \qquad P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = I,$$

sunt proiectorii ortogonali corespunzători, adică

$$F P_k = (-\mathrm{i})^k\, P_k, \qquad \text{oricare ar fi} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Transformarea Fourier F admite descompunerea spectrală

$$F = \sum_{k=0}^{3} (-\mathrm{i})^k P_k = P_0 - \mathrm{i}P_1 - P_2 + \mathrm{i}P_3.$$

3.15.6* Polinoamele Hermite

$$H_k(x) = (-1)^k\, \mathrm{e}^{x^2}\, \frac{d^k}{dx^k}\, \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad k \in \{0, 1, 2, ...\}$$

verifică relaţiile de recurenţă

$$H_{k+1}(x) - 2x\, H_k(x) + 2k\, H_{k-1}(x) = 0, \qquad H_k'(x) = 2k\, H_{k-1}(x).$$

În cazul transformării Fourier continue

$$f \mapsto \mathcal{F}[f], \qquad \text{unde} \qquad \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\, dx,$$

funcţia Hermite-Gauss

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = H_k(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

este funcţie proprie

$$\mathcal{F}[f_k] = (-\mathrm{i})^k\, f_k,$$

adică (v. [12], pag 194)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} H_k(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = (-\mathrm{i})^k\, H_k(\xi)\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

3.15.7* Plecând de la funcţia periodică

$$\Phi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Phi_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\,(\alpha N + x)\right)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\,(\alpha N+x)\right)^2}$$

cu perioada N, definim funcţia

$$\phi_k : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi_k(n) = \Phi_k(n).$$

3.15.8* **Teoremă** [20]. *Pentru orice $k \in \{0, 1, 2, ...\}$, funcţia $\phi_k : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$\phi_k(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\,(\alpha N + n)\right)\, \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}(\alpha N+n)^2}$$

este funcţie proprie a transformării Fourier finite

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} jn} \phi_k(n) = (-\mathrm{i})^k \phi_k(j),$$

adică

$$F[\phi_k] = (-\mathrm{i})^k \phi_k.$$

Demonstraţie. Funcţia periodică $\Phi_k(x)$ admite dezvoltarea în serie Fourier

$$\Phi_k(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}\ell x}$$

cu coeficienţii

$$\begin{aligned} a_\ell &= \tfrac{1}{N} \textstyle\int_0^N \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}\ell x} \Phi_k(x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{N} \textstyle\int_0^N \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}\ell x} \displaystyle\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\,(\alpha N+x)\right)^2} H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\,(\alpha N+x)\right)\, dx \end{aligned}$$

Notând $t = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}\,(\alpha N + x)$ şi utilizând formulele $H_k(-x) = (-1)^k H_k(x)$ şi

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha\sqrt{2\pi N}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi N}} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

obţinem relaţia

$$\begin{aligned}
a_\ell &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi N}}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha\sqrt{2\pi N}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi N}} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}\ell\left(t\sqrt{\frac{N}{2\pi}}-\alpha N\right)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,H_k(t)\,dt\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi N}}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha\sqrt{2\pi N}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi N}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell t\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,H_k(t)\,dt\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{N}}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell t\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,H_k(t)\,dt\\
&= \tfrac{\mathrm{i}^k}{\sqrt{N}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}\ell^2}\,H_k\left(-\ell\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\right)\\
&= \tfrac{(-\mathrm{i})^k}{\sqrt{N}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}\ell^2}\,H_k\left(\ell\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\right)
\end{aligned}$$

care conduce la

$$\Phi_k(x)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}\ell x}=\tfrac{(-\mathrm{i})^k}{\sqrt{N}}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}\ell x}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}\ell^2}\,H_k\left(\ell\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\right)$$

Din relaţia

$$\begin{aligned}
\phi_k(j) &= \tfrac{(-\mathrm{i})^k}{\sqrt{N}}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}j\ell}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}\ell^2}\,H_k\left(\ell\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\right)\\
&= (-\mathrm{i})^k\,\tfrac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}j(\alpha N+n)}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}(\alpha N+n)^2}\,H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\,(\alpha N+n)\right)\\
&= (-\mathrm{i})^k\,\tfrac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}jn}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{N}(\alpha N+n)^2}\,H_k\left(\sqrt{\tfrac{2\pi}{N}}\,(\alpha N+n)\right)\\
&= (-\mathrm{i})^k\,\tfrac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}jn}\phi_k(n)
\end{aligned}$$

obţinută cu ajutorul egalităţii

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\varphi(\ell)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha N+n)$$

rezultă

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}jn}\phi_k(n)=(-\mathrm{i})^k\phi_k(j),\qquad \text{oricare ar fi}\quad j\in\mathbb{Z}_N.$$

3.15.9 Deoarece spaţiul Hilbert al funcţiilor de forma $\phi : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$ este un spaţiu de dimensiune N, dintre funcţiile ϕ_k cel mult N sunt liniar independente.

3.16 Elemente ale structurii unui spaţiu Hilbert

3.16.1 Vom considera cazul unui spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensiune impară, $d=2s+1$, deşi majoritatea rezultatelor prezentate sunt valabile şi în cazul în care $\mathcal{H}$ are dimensiune pară. Spaţiul $\mathcal{H}$ se poate identifica (utilizând o bază ortonormată) cu $\mathbb{C}^d$ şi îl vom privi ca fiind spaţiul tuturor funcţiilor de forma

$$\varphi : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

considerat cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{n=-s}^{s} \overline{\varphi(n)}\, \psi(n).$$

3.16.2 Funcţiile $\{\delta_k\}_{k=-s}^{s}$, unde

$$\delta_k : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \delta_k(n) = \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad k=n, \\ 0 & \text{dacă} \quad k\neq n, \end{cases}$$

formează o bază ortonormată, numită *baza canonică* sau *baza computaţională*. Scriind $|k\rangle$ în loc de δ_k avem

$$\langle k|\ell\rangle = \delta_{k\ell}, \qquad \sum_{k=-s}^{s} |k\rangle\langle k| = I$$

şi

$$|\varphi\rangle = I|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^{s} |k\rangle\langle k|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^{s} \varphi(k)\, |k\rangle.$$

3.16.3 În reprezentarea aleasă, transformarea Fourier directă este

$$F : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d : \varphi \mapsto F[\varphi], \qquad F[\varphi](k) = \tfrac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=-s}^{s} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} kn}\, \varphi(n),$$

iar cea inversă

$$F^{-1} : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d : \varphi \mapsto F^{-1}[\varphi], \qquad F^{-1}[\varphi](k) = \tfrac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=-s}^{s} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} kn}\, \varphi(n).$$

Deoarece

$$F = IFI = \sum_{n,k=-s}^{s} |n\rangle\langle n|F|k\rangle\langle k| = \tfrac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n,k=-s}^{s} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}kn}|n\rangle\langle k|,$$

avem

$$F = \tfrac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n,k=-s}^{s} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}kn}|n\rangle\langle k|,$$

$$F^{-1} = F^* = \tfrac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n,k=-s}^{s} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}kn}|n\rangle\langle k|$$

şi

$$F^2 = F^{*2} = \sum_{n=-s}^{s} |-n\rangle\langle n|, \qquad F^2[\varphi](k) = \varphi(-k).$$

3.16.4 Funcţiile $\{|\tilde{k}\rangle\}_{k=-s}^{s}$, unde

$$|\tilde{k}\rangle = F^*|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^{s} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}kn}|n\rangle,$$

formează o bază ortonormată şi

$$\langle\tilde{k}| = \langle k|F = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^{s} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}kn}\langle n|.$$

În particular, avem

$$\langle\tilde{k}|\tilde{\ell}\rangle = \delta_{k\ell}, \qquad \sum_{k=-s}^{s} |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}| = I$$

şi deci

$$|\varphi\rangle = I|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^{s} |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^{s} |\tilde{k}\rangle\langle k|F|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^{s} F[\varphi](k)\,|\tilde{k}\rangle.$$

3.16.5 Funcţiile $\{|n\rangle\}_{n=-s}^{s}$ sunt funcţii proprii ale operatorului autoadjunct

$$Q : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d : \varphi \mapsto Q\varphi, \qquad (Q\varphi)(n) = n\,\varphi(n),$$

iar funcţiile $\{|\tilde{k}\rangle\}_{k=-s}^{s}$ sunt funcţii proprii ale operatorului autoadjunct

$$P : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \qquad P = F^*QF.$$

Avem

$$Q|n\rangle = n|n\rangle, \quad \text{oricare ar fi } \; n \in \{-s, -s+1, ..., s-1, s\},$$

$$P|\tilde{k}\rangle = k|\tilde{k}\rangle, \quad \text{oricare ar fi } \; k \in \{-s, -s+1, ..., s-1, s\}$$

şi descompunerile spectrale

$$Q = \sum_{n=-s}^{s} n\,|n\rangle\langle n|, \qquad P = \sum_{k=-s}^{s} k\,|\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}|.$$

3.16.6 Operatorii unitari

$$A = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}P} : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \qquad A = \sum_{k=-s}^{s} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}k} |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}|,$$

şi

$$B = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}Q} : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \qquad B = \sum_{n=-s}^{s} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}n} |n\rangle\langle n|,$$

verifică relaţiile (adunarea se face modulo d)

$$\begin{aligned}
&A^\alpha|n\rangle = |n+\alpha\rangle, && B^\beta|n\rangle = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}n\beta}|n\rangle,\\
&A^\alpha|\tilde{k}\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}k\alpha}|\tilde{k}\rangle, && B^\beta|\tilde{k}\rangle = |\widehat{k+\beta}\rangle,\\
&(A^\alpha\varphi)(n) = \varphi(n-\alpha), && (B^\beta\varphi)(n) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}n\beta}\varphi(n),\\
&A^d = B^d = I, && A^\alpha B^\beta = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}\alpha\beta} B^\beta A^\alpha,
\end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathbb{C}^d$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Operatorii

$$D(\alpha,\beta) = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{d}\alpha\beta} A^\alpha B^\beta \qquad \text{cu} \qquad \alpha,\beta \in \{-s, -s+1, ..., s-1, s\},$$

satisfăcând relaţia

$$D(\alpha,\beta)|\varphi\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{i}}{d}\alpha\beta} \sum_{n=-s}^{s} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}\beta n} \varphi(n-\alpha)|n\rangle,$$

definesc o reprezentare a unei versiuni finte a grupului Heisenberg-Weyl.

3.16.7 În cazul în care există, transformata Fourier a unei funcţii $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathcal{F}[f](\xi) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\, dx.$$

Transformata Fourier a funcţiei gaussiene (v. Fig. 3.12)

$$g_\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g_\kappa(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}x^2},$$

unde $\kappa \in (0, \infty)$ este un parametru, este o funcţie de aceeaşi formă

$$\mathcal{F}[g_\kappa] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\, g_{\frac{1}{\kappa}}.$$

Utilizând metodele de la pag. 176-**8** se poate arăta că funcţiile (v. Fig. 3.12)

$$\mathbf{g}_\kappa : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathbf{g}_\kappa(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\kappa\pi}{d}(\alpha d+n)^2},$$

verifică relaţia similară

$$F[\mathbf{g}_\kappa] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\, \mathbf{g}_{\frac{1}{\kappa}}.$$

Funcţiile $\mathbf{g}_\kappa$ pot fi privite ca versiuni finite ale funcţiilor gaussiene g_κ.

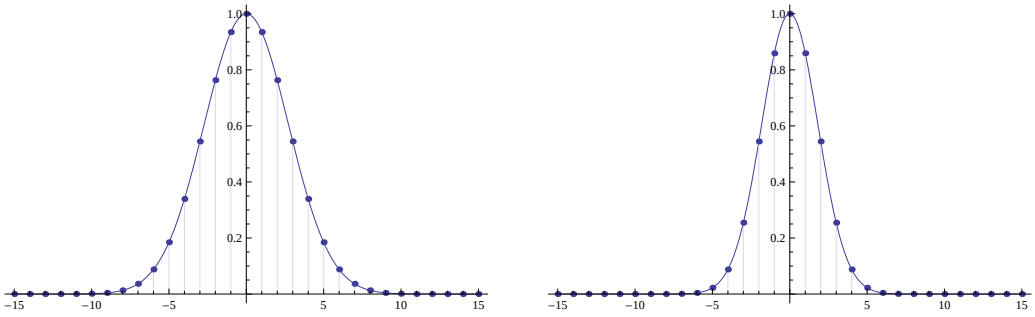

Figura 3.12: Funcţiile $g_{2/3}$, $\mathbf{g}_{2/3}$ (stânga) şi $g_{3/2}$, $\mathbf{g}_{3/2}$ (dreapta) în cazul $d=31$.

3.16.8 Funcţia $\mathbf{g}_1$, cu proprietatea $F[\mathbf{g}_1]=\mathbf{g}_1$, este un analog finit al gaussienei $g_1(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$, iar funcţia normată (v. Fig. 3.13)

$$\mathbf{g}=\frac{\mathbf{g}_1}{||\mathbf{g}_1||},\quad \text{unde}\ \ ||\mathbf{g}_1||^2=\sum_{n=-s}^{s}(\mathbf{g}_1(n))^2,$$

este un analog finit al gaussieniei normate $\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. Distribuţia binomială

$$b\colon\{-s,-s+1,...,s-1,s\}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad b(n)=C_{2s}^{s+n}$$

poate şi ea fi privită ca un analog finit al gaussienei $g_1(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ deşi

$$\begin{aligned}F[b](k)&=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=-s}^{s}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn}\,C_{2s}^{s+n}=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{j=0}^{2s}C_{2s}^{j}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}k(j-s)}\\&=\frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}ks}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}k}\right)^{2s}=\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{d}k}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{d}k}\right)^{2s}=\frac{4^s}{\sqrt{d}}\cos^{2s}\frac{k\pi}{d}.\end{aligned}$$

Distribuţia binomială normată (v. Fig. 3.13)

$$\mathbf{b}=\frac{b}{||b||},\quad \text{unde}\ \ ||b||^2=\sum_{n=-s}^{s}(C_{2s}^{s+n})^2=\sum_{j=0}^{2s}(C_{2s}^{j})^2=C_{4s}^{2s},$$

este un alt analog finit al gaussieniei normate $\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

3.16.9 Sistemele de d^2 vectori $\{|\alpha,\beta\rangle\}_{\alpha,\beta=-s}^{s}$ şi $\{|\alpha,\beta\rangle\!\rangle\}_{\alpha,\beta=-s}^{s}$, unde

$$\begin{aligned}|\alpha,\beta\rangle&=D(\alpha,\beta)|\mathbf{g}\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{d}\alpha\beta}\sum_{n=-s}^{s}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}\beta n}\mathbf{g}(n-\alpha)|n\rangle,\\|\alpha,\beta\rangle\!\rangle&=D(\alpha,\beta)|\mathbf{b}\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{d}\alpha\beta}\sum_{n=-s}^{s}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}\beta n}\mathbf{b}(n-\alpha)|n\rangle,\end{aligned}$$

sunt frame-uri exacte în $\mathbb{C}^d$ deoarece

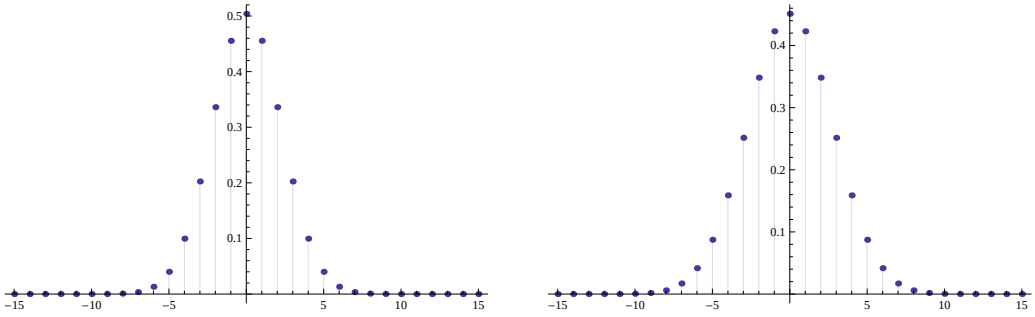

Figura 3.13: Gaussienele finite **g** (stânga) şi **b** (dreapta) în cazul $d = 31$.

$$\frac{1}{d}\sum_{\alpha,\beta=-s}^{s} |\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta| = I \qquad \text{şi} \qquad \frac{1}{d}\sum_{\alpha,\beta=-s}^{s} |\alpha,\beta\rangle\rangle\langle\langle\alpha,\beta| = I.$$

Ele pot fi privite ca versiuni finite ale sistemului de stări coerente standard $\{|q,p\rangle\}$ din $L^2(\mathbb{R})$ (v. pag. 123-**10**).

3.16.10 Utilizând frame-ul $\{|\alpha,\beta\rangle\}_{\alpha,\beta=-s}^{s}$, putem asocia fiecărei funcţii

$$f : \{-s,-s+1,...,s-1,s\}\times\{-s,-s+1,...,s-1,s\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

operatorul liniar

$$A_f : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \qquad A_f = \frac{1}{d}\sum_{\alpha,\beta=-s}^{s} f(\alpha,\beta)\,|\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|.$$

Invers, fiecărui operator liniar $A : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$ îi putem asocia funcţia

$$f_A : \{-s,-s+1,...,s-1,s\}\times\{-s,-s+1,...,s-1,s\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită prin formula

$$f_A(\alpha,\beta) = \langle\alpha,\beta|A|\alpha,\beta\rangle.$$

Corespondenţe similare între funcţii şi operatori liniari se pot defini utilzând frame-ul $\{|\alpha,\beta\rangle\rangle\}_{\alpha,\beta=-s}^{s}$.

3.16.11 Unei funcţii

$$\varphi : \{-s,-s+1,...,s-1,s\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

i se poate asocia *funcţia Wigner discretă*

$$W_\varphi : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \times \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

definită prin

$$W_\varphi(n,m) = \frac{1}{d} \sum_{k=-s}^{s} \mathrm{e}^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{d} mk}\, \varphi(n-k)\, \varphi(n+k).$$

3.16.12 Se ştie că funcţia Γ a lui Euler permite o prelungire a funcţiei factorial

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad \text{oricare ar fi } \ n \in \{0,1,2,3,...\}$$

şi că

$$\lim_{x \to n} |\Gamma(x)| = \infty, \qquad \text{oricare ar fi } \ n \in \{0,-1,-2,-3,...\}.$$

Admiţând că

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = 0 \qquad \text{pentru } \ n \in \{0,-1,-2,-3,...\}$$

obţinem o definiţie extinsă pentru coeficienţii binomiali

$$C_n^k = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{dacă} \quad k \in \{0,1,2,...,n\}, \\ 0 & \text{dacă} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,2,...,n\}. \end{cases}$$

3.16.13 Dacă $n, m \in \{-s, -s+1, ..., s-1, s\}$, atunci coeficientul lui X^{s+m} din polinomul $(1+X)^{s-n}(1-X)^{s+n}$ este

$$K_m(n) = \sum_{k=0}^{s+m} (-1)^k\, C_{s+n}^k\, C_{s-n}^{s+m-k},$$

adică avem

$$(1-X)^{s+n}(1+X)^{s-n} = \sum_{m=-s}^{s} K_m(n)\, X^{s+m}.$$

Polinoamele $K_m(X)$ se numesc *polinoame Kravchuk*.

3.16.14 Teoremă. *Funcţiile polinomiale* $K_m : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$K_m(n) = \sum_{k=0}^{s+m} (-1)^k\, C_{s+n}^k\, C_{s-n}^{s+m-k}$$

verifică relaţia

$$\sum_{n=-s}^{s} C_{2s}^{s+n}\, K_m(n)\, K_\ell(n) = 4^s\, C_{2s}^{s+m}\, \delta_{m\ell}, \qquad (3.31)$$

oricare ar fi $m, \ell \in \{-s, -s+1, ..., s-1, s\}$.

Demonstraţie. Polinomul de două variabile

$$P(X,Y) = \sum_{m=-s}^{s} \sum_{\ell=-s}^{s} \left(\sum_{n=-s}^{s} C_{2s}^{s+n} K_m(n) K_\ell(n) \right) X^{s+m} Y^{s+\ell}$$

se mai poate scrie

$$\begin{aligned} P(X,Y) &= \sum_{n=-s}^{s} C_{2s}^{s+n} \sum_{m=-s}^{s} K_k(n) X^{s+m} \sum_{\ell=-s}^{s} K_\ell(n) X^{s+\ell} \\ &= \sum_{n=-s}^{s} C_{2s}^{s+n} (1-X)^{s+n}(1+X)^{s-n}(1-Y)^{s+n}(1+Y)^{s-n} \\ &= [(1-X)(1-Y) + (1+X)(1+Y)]^{2s} = 4^s (1+XY)^{2s} \\ &= 4^s \sum_{m=-s}^{s} C_{2s}^{s+m} X^{s+m} Y^{s+m}. \end{aligned}$$

3.16.15* Se ştie că funcţia hipergeometrică

$$ {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{3.32}$$

unde

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)},$$

verifică relaţia

$$ {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -n,\ \beta \\ \gamma \end{array} \middle| z \right) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \, {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -n,\ \beta \\ \beta-\gamma-n+1 \end{array} \middle| 1-z \right).$$

Utilizând această relaţie obţinem egalitatea

$$ {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m,\ -s-n \\ 1-n-m \end{matrix} \middle| -1 \right) = \frac{\Gamma(1-n-m)\,\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s-n+1)\,\Gamma(s-m+1)} \, {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m,\ -s-n \\ -2s \end{matrix} \middle| 2 \right).$$

Deoarece

$$(-\alpha)_k = (-\alpha)(-\alpha+1)...(-\alpha+k-1) = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

relaţia anterioară se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{s+m} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(s+m+1)}{\Gamma(s+m-k+1)} \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+n-k+1)} \frac{\Gamma(1-m-n)}{\Gamma(1-m-n+k)} \\ &\qquad = \frac{\Gamma(1-n-m)\,\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s-n+1)\,\Gamma(s-m+1)} \, {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m,\ -s-n \\ -2s \end{matrix} \middle| 2 \right) \end{aligned}$$

sau sub forma

$$\sum_{k=0}^{s+m}(-1)^k\,\frac{\Gamma(s+n+1)}{k!\,\Gamma(s+n-k+1)}\,\frac{\Gamma(s-n+1)}{\Gamma(s+m-k+1)\Gamma(1-m-n+k)}$$
$$=\frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s+m+1)\,\Gamma(s-m+1)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-s-m,\,-s-n\\ -2s\end{matrix}\,\middle|\,2\right),$$

echivalentă cu

$$\sum_{k=0}^{s+m}(-1)^k\,C_{s+n}^{k}\,C_{s-n}^{s+m-k}=C_{2s}^{s+m}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-s-m,\,-s-n\\ -2s\end{matrix}\,\middle|\,2\right),$$

adică cu

$$K_m(n)=C_{2s}^{s+m}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-s-m,\,-s-n\\ -2s\end{matrix}\,\middle|\,2\right) \tag{3.33}$$

3.16.16 Din relaţiile (3.31), (3.32) şi (3.33) rezultă că *funcţiile Kravchuk*

$$\mathcal{K}_m(n)=\frac{1}{2^s}\sqrt{C_{2s}^{s+m}\,C_{2s}^{s+n}}\;{}_2F_1\left(\begin{matrix}-s-m,\,-s-n\\ -2s\end{matrix}\,\middle|\,2\right)$$

formează u bază ortonormată în $\mathbb{C}^d$

$$\sum_{n=-s}^{s}\mathcal{K}_m(n)\,\mathcal{K}_\ell(n)=\delta_{m\ell}$$

şi în plus

$$\mathcal{K}_m(n)=\mathcal{K}_n(m), \tag{3.34}$$

oricare ar fi $n,m\in\{-s,-s+1,...,s-1,s\}$. Scriind $|\hat{m}\rangle$ în loc de $\mathcal{K}_m$ avem

$$\langle\hat{m}|\hat{\ell}\rangle=\delta_{m\ell}\qquad\text{şi}\qquad\sum_{m=-s}^{s}|\hat{m}\rangle\langle\hat{m}|=I.$$

3.16.17 Transformarea unitară

$$K:\mathbb{C}^d\longrightarrow\mathbb{C}^d,\qquad K|n\rangle=\sum_{m=-s}^{s}\mathcal{K}_n(m)\,|m\rangle,$$

este numită *transformare Kravchuk*. Din relaţia (3.34) rezultă că

$$K^*=K\qquad\text{şi prin urmare}\qquad K^2=I.$$

3.16.18 În concluzie, printre "uneltele" matematice disponibile în cazul unui spaţiu Hilbert de dimensiune impară $d=2s+1$ se află:

- transformările unitare Fourier şi Kravchuk;
- bazele ortonormate $\{|n\rangle\}_{n=-s}^{s}$, $\{|\tilde{n}\rangle\}_{n=-s}^{s}$, $\{|\hat{n}\rangle\}_{n=-s}^{s}$;

- operatorii autoadjuncţi Q şi P;
- transformarile unitare $A = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}P}$ şi $B = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}Q}$;
- utilizarea funcţiei Wigner $\varphi \mapsto W_\varphi$;
- gaussienele finite **g** şi **b**;
- frame-urile exacte $\{|\alpha,\beta\rangle\}_{\alpha,\beta=-s}^{s}$ şi $\{|\alpha,\beta\rangle\!\rangle\}_{\alpha,\beta=-s}^{s}$;
- metoda de cuantificare $f \mapsto A_f$;
- metoda de decuantificare $A \mapsto f_A$.
- reprezentări liniare ale algebrelor Lie $su(2)$, $o(3)$, $sl(2,\mathbb{C})$;
- reprezentări liniare ireductibile ale grupurilor $SO(3)$ şi $SU(2)$;
- un frame infinit (spin coherent states, în engleză) definit cu ajutorul reprezentărilor liniare ireductibile ale lui $SO(3)$ sau $SU(2)$ (v. [28]).

3.17 Produs tensorial de spaţii Hilbert

3.17.1 Fie $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{K}$ două spaţii Hilbert. Orice element $\Phi \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ este de forma

$$\Phi = \sum_i x_i \otimes y_i \qquad \text{cu} \qquad x_i \in \mathcal{H},\ \ y_i \in \mathcal{K},$$

iar relaţia

$$\left\langle \sum_i x_i \otimes y_i, \sum_j x'_j \otimes y'_j \right\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i, x'_j\rangle \langle y_i, y'_j\rangle$$

defineşte un produs scalar în $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$.
Astfel, produsul tensorial a două spaţii Hilbert este un spaţiu Hilbert.

3.17.2 Dacă $\mathfrak{B}_\mathcal{H} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $\mathfrak{B}_\mathcal{K} = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ sunt baze ortonormate în $\mathcal{H}$ şi respectiv $\mathcal{K}$, atunci

$$\langle v_i \otimes w_j,\ v_k \otimes w_\ell \rangle = \langle v_i, v_k\rangle\, \langle w_j, w_\ell\rangle = \delta_{ik}\, \delta_{j\ell}$$

şi prin urmare

$$\mathfrak{B} = \{\ v_i \otimes w_j \mid\ i \in \{1,2,...,n\},\ j \in \{1,2,...,m\}\ \}$$

este bază ortonormată în $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$.

3.17.3 Utilizând notaţia comprimată

$$|v_i w_j\rangle = |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$$

relaţiile de completitudine şi ortogonalitate se scriu

$$\sum_{i,j} |v_i w_j\rangle\langle v_i w_j| = I, \qquad \langle v_i w_j | v_k w_\ell\rangle = \delta_{ik}\,\delta_{j\ell}.$$

Oricare ar fi $\Phi \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$, avem

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j} |v_i w_j\rangle\langle v_i w_j|\Phi\rangle,$$

adică $|\Phi\rangle$ admite reprezentarea

$$|\Phi\rangle = \Phi^{ij}\,|v_i w_j\rangle \qquad \text{cu} \qquad \Phi^{ij} = \langle v_i w_j|\Phi\rangle.$$

Produsul scalar a două elemente $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ se poate scrie sub forma

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \sum_{i,j}\langle\Phi|v_i w_j\rangle\langle v_i w_j|\Psi\rangle = \sum_{i,j}\overline{\Phi^{ij}}\,\Psi^{ij}.$$

3.17.4 Utilizând baza computaţională $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ (vectorii sunt enumeraţi în ordine lexicografică), un element $\Phi \in \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ se poate reprezenta sub forma

$$\Phi = \Phi^{00}|00\rangle + \Phi^{01}|01\rangle + \Phi^{10}|10\rangle + \Phi^{11}|11\rangle$$

şi lui i se pot asocia matricele

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{00} \\ \Phi^{01} \\ \Phi^{10} \\ \Phi^{11} \end{pmatrix}.$$

Produsul scalar a două elemente $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$, adică

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \sum_{i,j=0}^{1} \overline{\Phi^{ij}}\,\Psi^{ij} = \overline{\Phi^{00}}\,\Psi^{00} + \overline{\Phi^{01}}\,\Psi^{01} + \overline{\Phi^{10}}\,\Psi^{10} + \overline{\Phi^{11}}\,\Psi^{11}$$

se mai poate scrie sub forma

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \operatorname{tr}(\Phi^*\Psi) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} \overline{\Phi^{00}} & \overline{\Phi^{10}} \\ \overline{\Phi^{01}} & \overline{\Phi^{11}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi^{00} & \Psi^{01} \\ \Psi^{10} & \Psi^{11} \end{pmatrix}$$

sau sub forma

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \Phi^*\Psi = \begin{pmatrix} \overline{\Phi^{00}} & \overline{\Phi^{01}} & \overline{\Phi^{10}} & \overline{\Phi^{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{00} \\ \Psi^{01} \\ \Psi^{10} \\ \Psi^{11} \end{pmatrix}.$$

3.17.5 Produsul tensorial a doi operatori $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ şi $B:\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ este operatorul

$$A\otimes B : \mathcal{H}\otimes\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}\otimes\mathcal{K},$$

definit prin

$$(A\otimes B)\,(x\otimes y) = (Ax)\otimes(By)$$

pentru elementele de forma $x\otimes y$ şi extins prin linearitate la $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$.

3.17.6 Dacă $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$, $B:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$ sunt operatori liniari, $|a\rangle\in\mathcal{H}$, $|b\rangle\in\mathcal{K}$ sunt vectori proprii corespunzători valorilor proprii a, b, adică

$$A|a\rangle = a\,|a\rangle \qquad \text{şi} \qquad B|b\rangle = b\,|b\rangle,$$

atunci

$$(A\otimes B)\,(|a\rangle\otimes|b\rangle) = ab\,(|a\rangle\otimes|b\rangle)$$

şi

$$(A\otimes I + I\otimes B)\,(|a\rangle\otimes|b\rangle) = (a+b)\,(|a\rangle\otimes|b\rangle),$$

adică ab este valoare proprie a operatorului $A\otimes B$, iar $a+b$ este valoare proprie a operatorului $A\otimes I + I\otimes B$.

3.17.7 Propoziţie. *Dacă $A:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ şi $B:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$ sunt operatori liniari definiţi pe spaţiile Hilbert $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{K}$, atunci*

$$(A\otimes B)^* = A^*\otimes B^*.$$

Demonstraţie. Din relaţiile $\langle(A\otimes B)(x\otimes y), z\otimes u\rangle = \langle x\otimes y, (A\otimes B)^*(z\otimes u)\rangle$ şi

$$\begin{aligned}\langle(A\otimes B)(x\otimes y), z\otimes u\rangle &= \langle(Ax)\otimes(By), z\otimes u\rangle = \langle Ax, z\rangle\langle By, u\rangle \\ &= \langle x, A^*z\rangle\langle y, B^*u\rangle = \langle x\otimes y, (A^*z)\otimes(B^*u)\rangle \\ &= \langle x\otimes y, (A^*\otimes B^*)(z\otimes u)\rangle\end{aligned}$$

verificate oricare ar fi $x, z\in\mathcal{H}$ şi $y, u\in\mathcal{K}$, rezultă

$$(A\otimes B)^*(z\otimes u) = (A^*\otimes B^*)(z\otimes u), \qquad \text{oricare ar fi } z\in\mathcal{H} \text{ şi } u\in\mathcal{K},$$

şi prin urmare $(A\otimes B)^* = A^*\otimes B^*$.

3.17.8 Teoremă. *Produsul tensorial a doi operatori autoadjuncţi este autoadjunct.*
Produsul tensorial a doi operatori unitari este operator unitar.
Produsul tensorial a doi operatori pozitivi este operator pozitiv.
Produsul tensorial a doi proiectori este proiector.

Demonstraţie. Afirmaţiile din enunţ pot fi verificate folosind propoziţia anterioară. Alternativ, se pot utiliza rezultatele prezentate la pag. 35-**8**, pag. 36-**10** şi pag. 95-**22**.

3.17.9 Teoremă (Existenţa şi unicitatea urmelor parţiale).
Pentru orice $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ *există* $X\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *şi* $Y\in\mathcal{L}(\mathcal{K})$ *astfel încât*

$$\operatorname{tr}((A\otimes I)T)=\operatorname{tr}(AX),\qquad \textit{oricare ar fi}\quad A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}),$$
$$\operatorname{tr}((I\otimes B)T)=\operatorname{tr}(BY),\qquad \textit{oricare ar fi}\quad B\in\mathcal{L}(\mathcal{K}),$$

şi ei sunt unic determinaţi.

Demonstraţie. Pentru forma liniară

$$\mathcal{L}(\mathcal{H})\longrightarrow\mathbb{C}\ :\ A\mapsto\operatorname{tr}((A\otimes I)T)$$

definită pe spaţiul Hilbert $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ există $X\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ astfel încât (v. pag. 116-**2**)

$$\operatorname{tr}((A\otimes I)T)=\langle X^*,A\rangle,\qquad \text{oricare ar fi}\quad A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Dar, $\langle X^*,A\rangle=\operatorname{tr}(XA)$. Demonstraţia existenţei şi unicităţii lui Y este similară.

3.17.10 Definiţie. *Urmele parţiale* ale unui operator $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ sunt
operatorul liniar $\operatorname{tr}_1 T:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$ care verifică relaţia

$$\operatorname{tr}((I\otimes B)T)=\operatorname{tr}(B\operatorname{tr}_1 T),\qquad \text{oricare ar fi}\quad B\in\mathcal{L}(\mathcal{K}),$$

şi operatorul liniar $\operatorname{tr}_2 T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ care verifică relaţia

$$\operatorname{tr}((A\otimes I)T)=\operatorname{tr}(A\operatorname{tr}_2 T),\qquad \text{oricare ar fi}\quad A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

3.17.11 Formele liniare

$$\langle v_iw_j|=\langle v_i|\otimes\langle w_j|=v^i\otimes w^j$$

formează baza duală a spaţiului $(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})^*$ deoarece

$$\langle v_iw_j|v_kw_\ell\rangle=\langle v_i|v_k\rangle\langle w_jw_\ell\rangle=\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}.$$

Elementele matricei unui operator

$$T : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$$

în baza $\{\ |v_i w_j\rangle \mid\ i \in \{1,2,...,n\},\ j \in \{1,2,...,m\}\ \}$ sunt

$$T^{ij}_{k\ell} = \langle v_i w_j | T | v_k w_\ell \rangle .$$

3.17.12 Teoremă. Urmele parţiale *ale lui* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ *sunt operatorii*

$$\mathrm{tr}_1 T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K} \quad \textit{cu elementele matriceale} \quad \langle w_j | \mathrm{tr}_1 T | w_\ell \rangle = \sum_{i=1}^{n} T^{ij}_{i\ell},$$

$$\mathrm{tr}_2 T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \textit{cu elementele matriceale} \quad \langle v_i | \mathrm{tr}_2 T | v_k \rangle = \sum_{j=1}^{m} T^{ij}_{kj}.$$

Demonstraţie. A se vedea pag. 38-**17**.

3.17.13 Definiţie. *Transpuşii parţiali* ai lui $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ sunt operatorii

$${}^{t_1}T : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \quad \text{cu elementele matriceale} \quad {}^{t_1}T^{ij}_{k\ell} = T^{kj}_{i\ell},$$

$${}^{t_2}T : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \quad \text{cu elementele matriceale} \quad {}^{t_2}T^{ij}_{k\ell} = T^{i\ell}_{kj}.$$

3.17.14 Teoremă. *Dacă* $|\Phi\rangle = \Phi^{ij} |v_i w_j\rangle$ *este un element al spaţiului* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ *şi*

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \dots & \Phi^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n1} & \dots & \Phi^{nm} \end{pmatrix}$$

este matricea corespunzătoare, atunci

$$\mathrm{tr}_1 |\Phi\rangle\langle\Phi| = \overline{\Phi^* \Phi} \qquad \textit{şi} \qquad \mathrm{tr}_2 |\Phi\rangle\langle\Phi| = \Phi \Phi^*.$$

Demonstraţie. Avem

$$\langle w_j | (\mathrm{tr}_1 |\Phi\rangle\langle\Phi|) | w_\ell \rangle = \sum_{i=1}^{n} (|\Phi\rangle\langle\Phi|)^{ij}_{i\ell} = \sum_{i=1}^{n} \Phi^{ij}\, \bar{\Phi}^{i\ell} = \overline{(\Phi^* \Phi)^j_\ell},$$

$$\langle v_i | (\mathrm{tr}_2 |\Phi\rangle\langle\Phi|) | v_k \rangle = \sum_{j=1}^{m} (|\Phi\rangle\langle\Phi|)^{ij}_{kj} = \sum_{j=1}^{m} \Phi^{ij}\, \bar{\Phi}^{kj} = (\Phi \Phi^*)^i_k.$$

3.17.15 Pentru $|\Phi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, numărul coeficienţilor nenuli dintr-o reprezentare

$$|\Phi\rangle = \Phi^{ij}\, |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$$

depinde de bazele alese. El nu poate fi mai mic decât rangul Schmidt

$$r = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \dots & \Phi^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n1} & \dots & \Phi^{nm} \end{pmatrix}.$$

3.17.16 Teoremă (descompunerea Schmidt). *Dacă r este rangul Schmidt al lui $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$, atunci există numerele $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ şi două baze ortonormate $\{|a_1\rangle, ..., |a_n\rangle\}$ în $\mathcal{H}$ şi $\{|b_1\rangle, ..., |b_m\rangle\}$ în $\mathcal{K}$ astfel încât*

$$|\Phi\rangle = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\mu_k}\, |a_k\rangle \otimes |b_k\rangle.$$

Demonstraţie. Fie $\{|v_1\rangle, ..., |v_n\rangle\}$ o bază în $\mathcal{H}$, $\{|w_1\rangle, ..., |w_m\rangle\}$ o bază în $\mathcal{K}$ şi fie

$$|\Phi\rangle = \Phi^{ij}\, |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle.$$

Operatorul autoadjunct

$$\operatorname{tr}_2|\Phi\rangle\langle\Phi| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad \operatorname{tr}_2|\Phi\rangle\langle\Phi| = \sum_j \Phi^{ij}\, \bar{\Phi}^{\ell j}\, |v_i\rangle\langle v_\ell|,$$

este diagonalizabil şi pozitiv

$$\langle x|(\operatorname{tr}_2|\Phi\rangle\langle\Phi|)|x\rangle = \sum_j \Phi^{ij}\, \bar{\Phi}^{\ell j}\, \langle x|v_i\rangle\langle v_\ell|x\rangle = \sum_j |\Phi^{ij}\, \langle x|v_i\rangle|^2 \geq 0.$$

Dacă $\{|a_1\rangle, ..., |a_n\rangle\}$ este baza ortonormată în $\mathcal{H}$ formată de vectorii proprii ai operatorului $\operatorname{tr}_2|\Phi\rangle\langle\Phi|$ şi dacă $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ sunt valorile proprii corespunzătoare acestor vectori, atunci

$$\operatorname{tr}_2|\Phi\rangle\langle\Phi| = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, |a_k\rangle\langle a_k|.$$

Fie r' astfel încât $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{r'} > 0 = \mu_{r'+1} = \dots = \mu_n$. Punând $|v_i\rangle = c_i^k |a_k\rangle$, obţinem relaţia

$$\sum_j \Phi^{ij}\, \bar{\Phi}^{\ell j}\, c_i^k\, \bar{c}_\ell^s\, |a_k\rangle\langle a_s| = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, |a_k\rangle\langle a_k|,$$

posibilă numai dacă

$$\sum_j \Phi^{ij}\, \bar{\Phi}^{\ell j}\, c_i^k\, \bar{c}_\ell^s = \mu_k\, \delta_{ks}.$$

Din această relaţie rezultă că $\{|b_1\rangle, ..., |b_{r'}\rangle\}$, unde

$$|b_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \Phi^{ij}\, c_i^k\, |w_j\rangle,$$

este un sistem ortonormat şi

$$\Phi^{ij}\, c_i^k\, |w_j\rangle = 0, \qquad \text{pentru} \quad k \in \{r'+1, ..., n\}.$$

Sistemul $\{|b_1\rangle, ..., |b_{r'}\rangle\}$ poate fi extins până la o bază ortonormată $\{|b_1\rangle, ..., |b_m\rangle\}$ şi avem

$$|\Phi\rangle = \Phi^{ij}\, |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle = \Phi^{ij}\, c_i^k\, |a_k\rangle \otimes |w_j\rangle = \sum_{k=1}^{r'} \sqrt{\mu_k}\; |a_k\rangle \otimes |b_k\rangle$$

cu $r' = r$ deoarece rangul Schmidt este independent de baza utilizată.

Capitolul 4

Forme pătratice

4.1 Definiţie şi exemple

4.1.1 Definiţie. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, unde $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Prin *formă biliniară* se înţelege o aplicaţie

$$g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

astfel încât

$$\begin{aligned} &g(\alpha x+\beta y,\ z)=\alpha\, g(x,z)+\beta\, g(y,z) \\ &g(x,\ \alpha y+\beta z)=\alpha\, g(x,y)+\beta\, g(x,z) \end{aligned} \qquad \forall x,y,z \in \mathcal{V},\quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}.$$

4.1.2 Alegând o bază $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ si utilizând reprezentările

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad y=\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

ale vectorilor x şi y obţinem

$$g(x,y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,\ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, g(e_i,e_j)$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

unde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

4.1.3 Definiţie Fie $g:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{K}$ o formă biliniară şi $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bază în $\mathcal{V}$. Matricea

$$\mathcal{G}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g(e_1,e_1) & g(e_1,e_2) & \cdots & g(e_1,e_n) \\ g(e_2,e_1) & g(e_2,e_2) & \cdots & g(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(e_n,e_1) & g(e_n,e_2) & \cdots & g(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

se numeşte *matricea lui g* în raport cu baza $\mathcal{B}$.

4.1.4 Propoziţie. *Fie $g:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{K}$ o formă biliniară, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ două baze în $\mathcal{V}$ şi S matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Dacă $\mathcal{G}$ este matricea lui g în raport cu $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{G}'$ este matricea lui g în raport cu baza $\mathcal{B}'$, atunci*

$$\mathcal{G}'={}^tS\,\mathcal{G}\,S. \tag{4.1}$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, $\mathcal{B}'=\{e'_1,e'_2,...,e'_n\}$, $e'_i=\sum_{j=1}^n\alpha_{ji}\,e_j$, adică

$$S=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

şi fie $g_{ij}=g(e_i,e_j)$, $g'_{ij}=g(e'_i,e'_j)$. Avem

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= g(e'_i,e'_j)=g\left(\textstyle\sum_{k=1}^n\alpha_{ki}\,e_k,\ \sum_{m=1}^n\alpha_{mj}\,e_m\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n\alpha_{ki}\,\alpha_{mj}\,g(e_k,e_m)=\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n\alpha_{ki}\,g_{km}\,\alpha_{mj}, \end{aligned}$$

relaţie echivalentă cu (4.1).

4.1.5 Expresia în coordonate

$$g'_{ij}=\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n\alpha_{ki}\,\alpha_{mj}\,g_{km}$$

a relaţiei $\mathcal{G}'={}^tS\,\mathcal{G}\,S$, obţinută în demonstraţia propoziţiei, ne arată că orice formă biliniară este un tensor de tip $(0,2)$.

4.1.6 Definiţie. Spunem că forma biliniară

$$g:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{K}$$

este o *formă biliniară simetrică* dacă

$$g(x,y)=g(y,x),\qquad\forall x,y\in\mathcal{V}.$$

4.1.7 Definiţie. O aplicaţie

$$Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

este numită *formă pătratică* dacă există o formă biliniară simetrică

$$g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

astfel încât

$$Q(x) = g(x, x), \qquad \forall x \in \mathcal{V}.$$

4.1.8 Propoziţie. *Fiecărei forme pătratice $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ îi corespunde o singură formă biliniară simetrică $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ astfel încât*

$$Q(x) = g(x, x), \qquad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Demonstraţie. Din relaţia

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= g(x+y, x+y) \\ &= g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y) \\ &= Q(x) + Q(y) + 2\,g(x,y) \end{aligned}$$

rezultă

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \Big), \qquad \forall x, y \in \mathcal{V}.$$

4.1.9 Dacă $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ este o formă pătratică şi $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ forma biliniară simetrică asociată, atunci alegând o bază $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ obţinem relaţia

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j = (x_1 \;\; x_2 \;\; ... \;\; x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

unde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ şi x_1, x_2, ... , x_n sunt coordonatele lui x în baza aleasă.

4.1.10 Definiţie. Matricea unei forme pătratice în raport cu o bază este matricea formei biliniare simetrice asociate în raport cu acea bază.

4.1.11 Aplicaţia

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

este o formă pătratică deoarece există forma biliniară simetrică

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2 + x_3\, y_3 - x_1\, y_2 - x_2\, y_1 - 2x_1\, y_3 - 2x_3\, y_1$$

astfel încât $Q(x_1, x_2, x_3) = g((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3))$.

4.2 Reducerea la forma canonică

4.2.1 Matricea unei forme pătratice depinde de baza aleasă. In aplicaţii, este avantajoasă utilizarea unei baze în raport cu care expresia în coordonate a formei pătratice să fie cât mai simplă.

4.2.2 Definiţie. Spunem că forma pătratică $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ are în raport cu baza $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *forma canonică* dacă matricea lui Q în raport cu această bază este o matrice diagonală

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

adică, expresia în coordonate a formei Q în raport cu acestă bază este de forma

$$Q(x) = \lambda_1\, x_1^2 + \lambda_2\, x_2^2 + \cdots + \lambda_n\, x_n^2.$$

4.2.3 Expresia "forma pătratică $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ are în raport cu baza $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ forma canonică" trebuie înţeleasă în sensul "funcţia $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ are în raport cu baza $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ expresia cea mai simplă."

4.2.4 Teoremă (Gauss). *Orice formă pătratică poate fi redusă la forma canonică, adică, pentru orice formă pătratică $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, există o bază în raport cu care expresia lui Q are forma*

$$Q(x) = \lambda_1\, x_1^2 + \lambda_2\, x_2^2 + \cdots + \lambda_n\, x_n^2.$$

Demonstraţie. Baza căutată poate fi obţinută în toate cazurile utilizând metoda prezentată în rezolvările următoarelor două exerciţii.

4.2.5 Exerciţiu. Să se reducă la forma canonică forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3,$$

indicând şi baza utilizată.

Rezolvare. Deoarece

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1),$$

numerele x_1, x_2, x_3 pot fi privite ca fiind coordonatele vectorului $x \in \mathbb{R}^3$ în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}$. Grupând într-un pătrat termenii care conţin pe x_1, şi apoi pe cei care conţin pe x_2, obţinem relaţia

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 5x_3^2 \\ &= {x'_1}^2 + 2{x'_2}^2 - 5{x'_3}^2 \end{aligned}$$

care ne sugerează necesitatea de a căuta o bază $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ astfel încât coordonatele x'_1, x'_2, x'_3 în raport cu baza căutată $\mathcal{B}'$ să se exprime cu ajutorul coordonatelor x_1, x_2, x_3 în raport cu baza canonică $\mathcal{B}$ prin relaţiile

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x'_2 = x_2 - x_3 \\ x'_3 = x_3. \end{cases} \tag{4.2}$$

Determinarea bazei $\mathcal{B}'$ este echivalentă cu găsirea matricei

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Relaţiile $e'_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} e_i$ şi $x = \sum_{i=1}^3 x_i e_i = \sum_{j=1}^3 x'_j e'_j$ conduc la relaţia

$$\sum_{i=1}^3 x_i e_i = \sum_{j=1}^3 x'_j e'_j = \sum_{j=1}^3 x'_j \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} e_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x'_j \right) e_i,$$

echivalentă cu

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}\, x_1' + \alpha_{12}\, x_2' + \alpha_{13}\, x_3' \\ x_2 = \alpha_{21}\, x_1' + \alpha_{22}\, x_2' + \alpha_{23}\, x_3' \\ x_1 = \alpha_{31}\, x_1' + \alpha_{32}\, x_2' + \alpha_{33}\, x_3'. \end{cases}$$

Numerele α_{ij} pot fi imediat identificate dacă, folosind relaţiile (4.2), exprimăm x_1, x_2, x_3 cu ajutorul coordonatelor x_1', x_2', x_3'

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' + 3x_3' \\ x_2 = x_2' + x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

Se obţine

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce conduce la $\mathcal{B}' = \{e_1' = (1,0,0),\ e_2' = (1,1,0),\ e_3' = (3,1,1)\}$. În raport cu această bază Q are forma canonică

$$Q(x) = {x_1'}^2 + 2{x_2'}^2 - 5{x_3'}^2.$$

4.2.6 Exerciţiu. Să se reducă la forma canonică forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

indicând şi baza utilizată.

Rezolvare. Efectuăm mai întâi schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

care conduce la

$$Q(x) = {x_1'}^2 - {x_2'}^2 + 2x_1'x_3',$$

şi apoi utilizăm metoda folosită în exerciţiul anterior. Se obţine

$$Q(x) = (x_1' + x_3')^2 - {x_2'}^2 - {x_3'}^2 = {x_1''}^2 - {x_2''}^2 - {x_3''}^2,$$

unde

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + x_3' \\ x_2'' = x_2' \\ x_3'' = x_3'. \end{cases}$$

Exprimând coordonatele iniţiale x_1, x_2, x_3 în funcţie de cele finale x_1'', x_2'', x_3'',

$$\begin{cases} x_1 = x_1'' + x_2'' - x_3'' \\ x_2 = x_1'' - x_2'' - x_3'' \\ x_3 = x_3'', \end{cases}$$

rezultă ca matricea de trecere între baza iniţială $\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ şi baza finală $\mathcal{B}'' = \{e_1'',\ e_2'',\ e_3''\}$ este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce conduce la $\mathcal{B}'' = \{e_1'' = (1,1,0),\ e_2'' = (1,-1,0),\ e_3'' = (-1,-1,1)\}$. În raport cu această bază, Q are forma canonică

$$Q(x) = x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2.$$

Teoremă.(Jacobi) *Fie $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ o formă pătratică şi fie*

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea ei în raport cu o bază $\mathcal{B}$. Dacă

$$\Delta_1 = g_{11} \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

.....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci există o bază $\mathcal{B}'$ în raport cu care Q are expresia

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2.$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi fie $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ forma biliniară simetrică corespunzătoare lui Q. Arătăm că există o bază $\mathcal{B}'$ formată din vectori de forma

$$\begin{aligned} e'_1 &= \alpha_{11}e_1 \\ e'_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e'_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \cdots + \alpha_{nn}e_n \end{aligned}$$

satisfăcând pentru orice $j \in \{1, 2, ..., n\}$ relaţiile

$$\begin{cases} g(e'_j\ ,\ e_1) = 0 \\ g(e'_j\ ,\ e_2) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g(e'_j, e_{j-1}) = 0 \\ g(e'_j\ ,\ e_j) = 1 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} g_{11}\alpha_{1j} \ + \ g_{21}\alpha_{2j} \ + \ \cdots \ + \ g_{j1}\alpha_{jj} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{1j-1}\alpha_{1j} + g_{2j-1}\alpha_{2j} + \cdots + g_{jj-1}\alpha_{jj} = 0 \\ g_{1j}\alpha_{1j} \ + \ g_{2j}\alpha_{2j} \ + \ \cdots \ + \ g_{jj}\alpha_{jj} = 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

şi că în raport cu astfel de bază Q are expresia indicată. Deoarece

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1j} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{j1} & g_{j2} & \cdots & g_{jj} \end{vmatrix} \neq 0$$

sistemul (4.3) este un sistem Cramer care permite determinarea coeficienţilor α_{1j}, α_{2j}, ... , α_{jj} ai lui e'_j. In particular, $\alpha_{jj} = \Delta_{j-1}/\Delta_j$ şi

$$\begin{aligned} g'_{jj} &= g(e'_j, e'_j) = g(e'_j, \alpha_{1k}e_1 + \alpha_{2k}e_2 + \cdots + \alpha_{jj}e_j) \\ &= \alpha_{1j}\, g(e'_j, e_1) + \alpha_{2j}\, g(e'_j, e_2) + \cdots + \alpha_{j-1j}\, g(e'_j, e_{j-1}) + \alpha_{jj}\, g(e'_j, e_j) = \alpha_{jj}. \end{aligned}$$

Dacă $k < j$, atunci

$$\begin{aligned} g'_{jk} &= g(e'_j, e'_k) = g(e'_j, \alpha_{1k}e_1 + \alpha_{2k}e_2 + \cdots + \alpha_{kk}e_k) \\ &= \alpha_{1k}\, g(e'_j, e_1) + \alpha_{2k}\, g(e'_j, e_2) + \cdots + \alpha_{kk}\, g(e'_j, e_k) = 0. \end{aligned}$$

4.2.7 *Teoremă. Dacă $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial euclidian real,*

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

este o formă pătratică a cărei matrice în raport cu o bază ortonormată $\mathcal{B}$ este

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

atunci există o bază ortonormată $\mathcal{B}'$ în raport cu care Q are forma

$$Q(x) = \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 + \cdots + \lambda_n {x'_n}^2,$$

unde λ_1, λ_2, ... , λ_n sunt valorile proprii ale matricei $\mathcal{G}$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Relaţia

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \qquad Ae_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ji}\, e_j,$$

defineşte un operator autoadjunct a cărui matrice în raport cu baza $\mathcal{B}$ coincide cu matricea $\mathcal{G}$ a lui Q în raport cu aceeaşi bază. Deoarece A este diagonalizabil, există o bază ortonormată $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ formată din vectori proprii ai lui A în raport cu care matricea lui A este

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Notând cu S matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ avem

$$A' = S^{-1}\mathcal{G}S.$$

Pe de altă parte, ştim că matricea $\mathcal{G}'$ a formei pătratice Q în raport cu baza $\mathcal{B}'$ este

$$\mathcal{G}' = {}^tS\mathcal{G}S.$$

Deoarece matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice ortogonală, avem $S^{-1} = {}^tS$ şi

$$\mathcal{G}' = {}^tS\mathcal{G}S = S^{-1}\mathcal{G}S = A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Capitolul 5

Conice şi cuadrice

5.1 Conice

5.1.1 Vom prezenta în continuare unele aplicaţii ale algebrei liniare în geometrie.

5.1.2 Definiţie. Prin *conică* se înţelege mulţimea soluţiilor unei ecuaţii de forma

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2a_{10}\,x + 2a_{20}\,y + a_{00} = 0, \tag{5.1}$$

având cel puţin unul dintre coeficienţii a_{11}, a_{12}, a_{22} nenul.

5.1.3 Ecuaţia

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{5.2}$$

este ecuaţia unui cerc,

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0 \tag{5.3}$$

este ecuaţia unei elipse,

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \tag{5.4}$$

este ecuaţia unei hiperbole,

$$y^2 - x - 1 = 0 \tag{5.5}$$

este ecuaţia unei parabole, iar

$$x^2 - y^2 = 0$$

reprezintă ecuaţia a două drepte concurente.

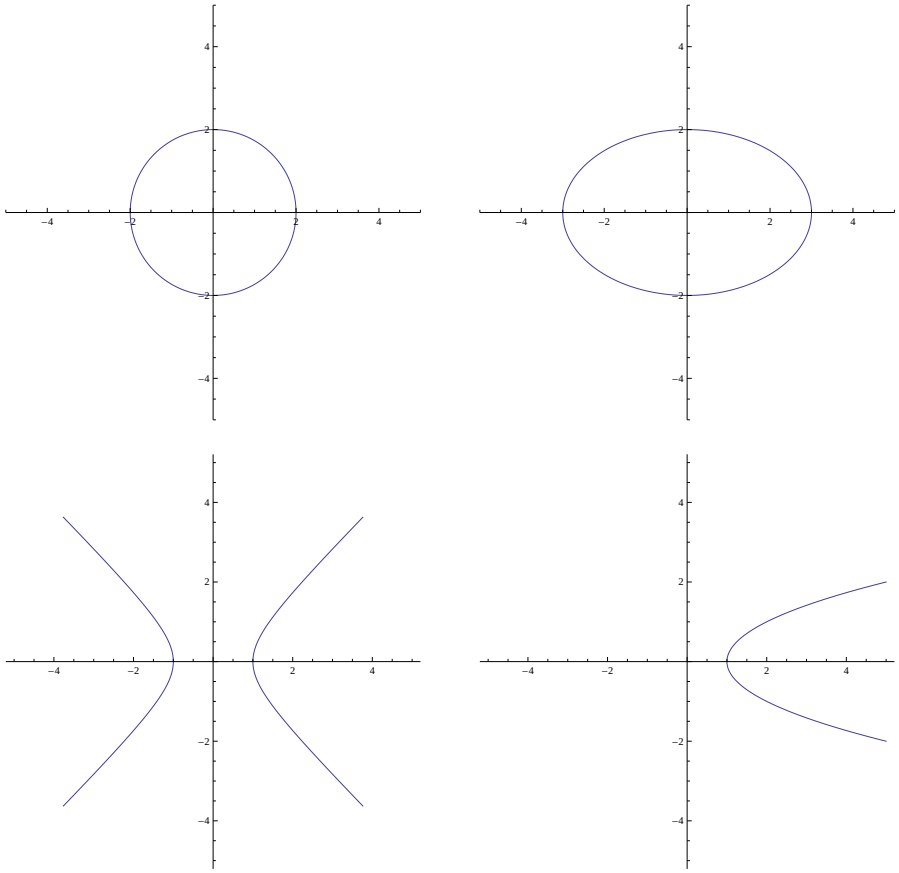

Figura 5.1: Cercul, elipsa, hiperbola şi parabola definite de ecuaţiile (5.2) - (5.5).

5.1.4 În cazul unei translaţii de vector (x_0, y_0) a reperului, urmate de o rotaţie de unghi α, legătura între coodonatele (x, y) ale unui punct în raport cu reperul iniţial $\mathcal{R}$ şi coordonatele (x', y') ale aceluiaşi punct în raport cu reperul final $\mathcal{R}'$ este (v. Fig. 5.2)

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases} \tag{5.6}$$

5.1.5 În urma schimbării de reper (translaţie cu $(2, 1)$, urmată de rotaţie de unghi $\frac{\pi}{4}$)

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

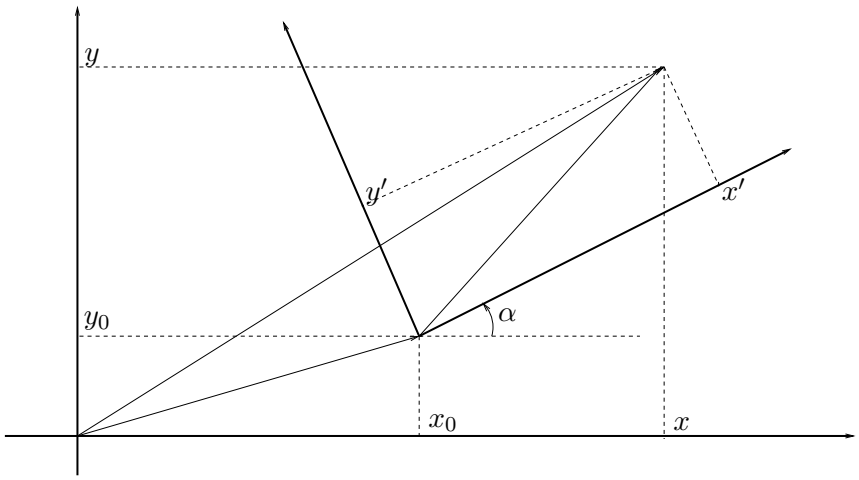

Figura 5.2: Schimbarea de reper (5.6).

ecuaţiile conicelor (v. Fig. 5.3)

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \tag{5.7}$$

$$13x^2 + 13y^2 - 10xy - 42x - 6y - 27 = 0 \tag{5.8}$$

$$2xy - 2x - 4y + 3 = 0 \tag{5.9}$$

$$x^2+y^2-2xy-(2+\sqrt{2})x+(2-\sqrt{2})y+3\sqrt{2}-1=0 \tag{5.10}$$

devin (v. (5.2) - (5.5))

$$\begin{aligned} &x'^2 + y'^2 - 4 = 0\\ &\tfrac{1}{9}x'^2 + \tfrac{1}{4}y'^2 - 1 = 0\\ &x'^2 - y'^2 - 1 = 0\\ &y'^2 - x' - 1 = 0. \end{aligned}$$

5.1.6 Teoremă. *La o schimbare de reper, ecuaţia unei conice*

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2a_{10}\,x + 2a_{20}\,y + a_{00} = 0$$

se transformă într-o ecuaţie de aceeaşi formă,

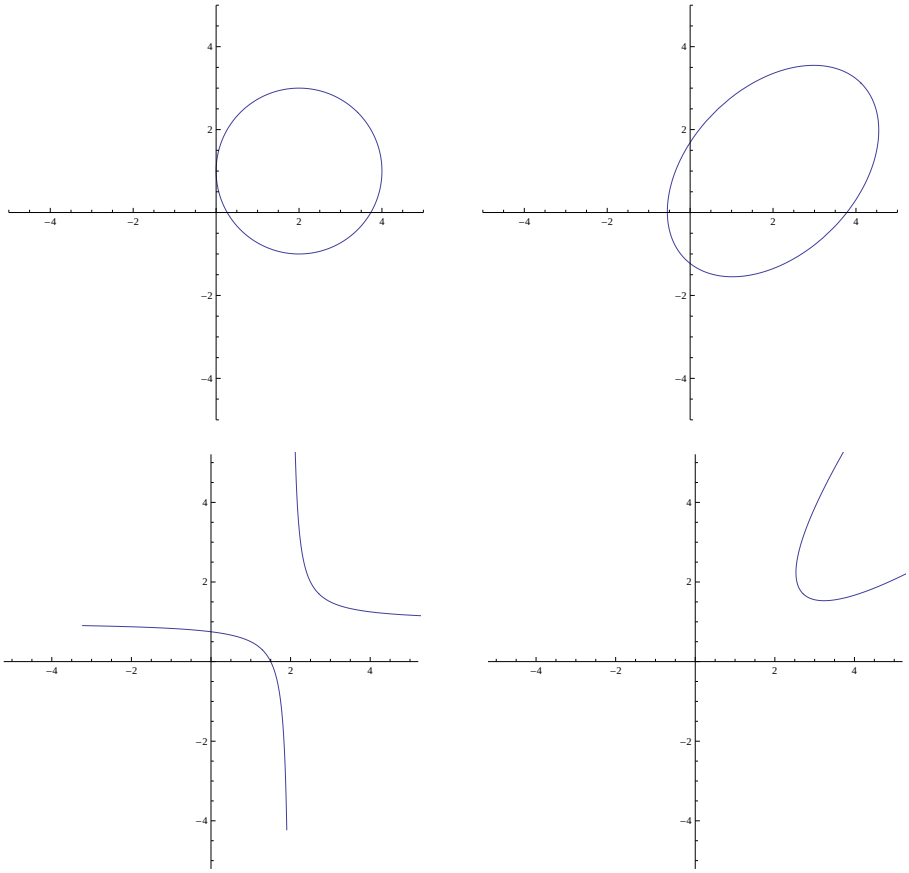

Figura 5.3: Cercul, elipsa, hiperbola şi parabola definite de ecuaţiile (5.7) - (5.10).

$$a'_{11}\,x^2 + 2\,a'_{12}\,xy + a'_{22}\,y^2 + 2a'_{10}\,x + 2a'_{20}\,y + a'_{00} = 0,$$

iar parametrii

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

rămân invarianţi, adică

$$a_{11}+a_{22}=a'_{11}+a'_{22},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{10} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{20} \\ a'_{10} & a'_{20} & a'_{00} \end{vmatrix}.$$

Demonstraţie. Relaţia

$$f(x,y)=a_{11}\,x^2+2\,a_{12}\,xy+a_{22}\,y^2+2a_{10}\,x+2a_{20}\,y+a_{00}$$

se poate scrie în formă matriceală

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tX & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

utilizând notaţiile

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Relaţia

$$\begin{cases} x=x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases}$$

se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix},$$

utilizând notaţiile

$$X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad T=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad R=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Din relaţia

$$\begin{aligned} f(x,y) &= ({}^tX \;\; 1) \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ({}^tX' \;\; 1) \begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tT & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ({}^tX' \;\; 1) \begin{pmatrix} A' & B' \\ {}^tB' & a'_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

rezultă că, în urma schimbării de reper, $f(x,y)$ se transformă într-un polinom de aceeaşi formă,

$$\begin{aligned} \Delta' &= \det \begin{pmatrix} A' & B' \\ {}^tB' & a'_{00} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tT & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix} = \Delta \end{aligned}$$

şi $A' = {}^tRAR$, adică

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

relaţie care conduce la $\delta' = \delta$ şi $I' = I$.

5.2 Reducerea la forma canonică

5.2.1 În cazul unei translaţii a reperului

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + x', \end{cases}$$

polinomul

$$f(x,y) = a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2a_{10}\,x + 2a_{20}\,y + a_{00}$$

se transformă în

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x',y') = a_{11}\,x'^2 + 2a_{12}\,x'\,y' + a_{22}\,y'^2 + 2(a_{11}\,x_0 + a_{12}\,y_0 \\ + a_{10})x' + 2(a_{12}\,x_0 + a_{22}\,y_0 + a_{20})y' + f(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.2.2 Definiţie. Spunem că punctul (x_0, y_0) este un *centru* al conicei (5.1) dacă, în raport cu reperul translatat cu (x_0, y_0), avem

$$\tilde{f}(x', y') = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{f}(-x', -y') = 0. \tag{5.12}$$

Propoziţie. *Punctul (x_0, y_0) este un* centru *al conicei (5.1) dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{10} = 0 \\ a_{12}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din (5.11) şi (5.12).

5.2.3 Teoremă. *a) Dacă $\delta \neq 0$, atunci conica (5.1) are un singur centru şi anume*

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} -a_{10} & a_{12} \\ -a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}, \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{10} \\ a_{12} & -a_{20} \end{vmatrix} \right).$$

b) În reperul rezultat în urma translaţiei cu (x_0, y_0), ecuaţia conicei este

$$a_{11}\, x'^2 + 2\, a_{12}\, x'\, y' + a_{22}\, y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

c) Există un reper în raport cu care ecuaţia conicei este

$$\lambda_1\, X^2 + \lambda_2\, Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \textit{adică} \quad \lambda^2 - I\,\lambda + \delta = 0.$$

Demonstraţie. a) În cazul $\delta \neq 0$, sistemul (5.13) are soluţia unică (x_0, y_0).
b) Din relaţia (5.11) rezultă că ecuaţia conicei în reperul rezultat în urma translaţiei cu (x_0, y_0) este

$$a_{11}\, x'^2 + 2\, a_{12}\, x'\, y' + a_{22}\, y'^2 + f(x_0, y_0) = 0.$$

Deoarece valoarea parametrului Δ nu depinde de reperul utilizat,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

relaţie care conduce la $f(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}$.
c) Conform teoremei prezentate la pag. 200-**7**, în cazul formei pătratice

$$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Q(x', y') = a_{11}\, x'^2 + 2\, a_{12}\, x'\, y' + a_{22}\, y'^2,$$

există o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^2$ formată din vectori proprii ai matricei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

în raport cu care Q are forma canonică

$$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Q(X, Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2.$$

Rotind reperul rezultat în urma translaţiei cu (x_0, y_0) astfel încât axele să fie dirijate de-a lungul vectorilor proprii ai matricei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

ecuaţia conicei devine $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$.

5.2.4 Dacă $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, atunci cel puţin unul dintre coeficienţii a_{11}, a_{22} este nenul, deoarece în caz contrar am avea $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. Vom analiza cazul $a_{11} \neq 0$, deoarece cazul $a_{22} \neq 0$ conduce la rezultate similare.

5.2.5 Teoremă *a) În cazul în care $\delta = 0$, $a_{11} \neq 0$ şi $\Delta = 0$, există un reper în raport cu care ecuaţia conicei este*

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{20}\, y' + a'_{00} = 0.$$

b) În cazul în care $\delta = 0$, $a_{11} \neq 0$ şi $\Delta \neq 0$, există un reper în raport cu care ecuaţia conicei este

$$Y^2 = 2pX, \qquad \textit{unde} \quad p = \sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}.$$

Demonstraţie. Efectuând o rotaţie de unghi α a reperului,

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{cases}$$

ecuaţia conicei devine

$$a'_{11}\, x^2 + 2\, a'_{12}\, xy + a'_{22}\, y^2 + 2a'_{10}\, x + 2a'_{20}\, y + a'_{00} = 0,$$

cu

$$a'_{11} = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\, \cos\alpha + a_{12}\, \sin\alpha)^2.$$

Alegând α astfel încât $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, rezultă $a'_{11} = 0$. Având în vedere invarianţa lui δ, rezultă că $a'_{11}a'_{22} - {a'_{12}}^2 = 0$, relaţie care conduce la $a'_{12} = 0$.

a) Din relaţia

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{10} \\ 0 & a'_{22} & a'_{20} \\ a'_{10} & a'_{20} & a'_{00} \end{vmatrix} = {a'_{10}}^2\, a'_{22} = 0$$

rezultă $a'_{10} = 0$. În urma rotaţiei considerate, ecuaţia conicei este

$$a'_{22}\, {y'}^2 + 2a'_{20}\, y' + a'_{00} = 0.$$

b) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $a'_{10} \neq 0$ şi ecuaţia conicei

$$a'_{22}\, {y'}^2 + 2a'_{10}\, x' + 2a'_{20}\, y' + a'_{00} = 0$$

se poate scrie succesiv

$$a'_{22}\left({y'}^2 + \frac{2a'_{20}}{a'_{22}} y'\right) + 2a'_{10}x' + a'_{00} = 0,$$

$$a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{20}}{a'_{22}}\right)^2 + 2a'_{10}\left(x' + \frac{a'_{22}a'_{00} - {a'_{20}}^2}{2a'_{10}\, a'_{22}}\right) = 0.$$

Efectuând translaţia

$$\begin{cases} X = x' + \frac{a'_{22}a'_{00} - {a'_{20}}^2}{2a'_{10}\, a'_{22}} \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{a'_{22}}, \end{cases}$$

ecuaţia conicei devine

$$Y^2 = \frac{-2\, a'_{10}}{a'_{22}}\, X.$$

Deoarece $\Delta = {a'_{10}}^2\, a'_{22}$ şi $I = a'_{22}$, ecuaţia se mai poate scrie

$$Y^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}\; X.$$

5.2.6 Ţinând seama că rădăcinile ecuaţiei $\lambda^2 - I\,\lambda + \delta = 0$ verifică relaţiile

$$\lambda_1 + \lambda_2 = I, \qquad \lambda_1\, \lambda_2 = \delta,$$

din teoremele anterioare, rezultă că există următoarele cazuri:

Cazul	Ce reprezintă conica
$\delta < 0$ şi $\Delta \neq 0$	hiperbolă
$\delta > 0$ şi $I\Delta < 0$	elipsă
$\delta > 0$ şi $I\Delta > 0$	mulţimea vidă
$\delta > 0$ şi $\Delta = 0$	un punct
$\delta < 0$ şi $\Delta = 0$	două drepte concurente
$\delta = 0$ şi $\Delta = 0$	două drepte paralele, o dreaptă sau mulţimea vidă
$\delta = 0$ şi $\Delta \neq 0$	o parabolă

5.3 Cuadrice

5.3.1 Definiţie. Prin *cuadrică* se înţelege mulţimea soluţiilor unei ecuaţii de forma

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 \; +2\,a_{12}\,xy + 2\,a_{13}\,xz + 2\,a_{23}\,yz$$
$$+2a_{10}\,x + 2a_{20}\,y + 2\,a_{30}\,z + a_{00} = 0,$$

cu cel puţin unul dintre coeficienţii a_{11}, a_{22}, a_{33} a_{12}, a_{13}, a_{23} nenul.

5.3.2 *Ecuaţiile reduse ale cuadricelor.* Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci cuadrica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

se numeşte *elipsoid*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

se numeşte *hiperboloid cu pânză*,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

se numeşte *hiperboloid cu două pânze*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

se numeşte *paraboloid eliptic*,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

se numeşte *paraboloid hiperbolic*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

se numeşte *cilindru eliptic*,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

se numeşte *cilindru hiperbolic*,

$$y^2 - 2ax = 0$$

se numeşte *cilindru parabolic*. Cuadrica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

reprezintă două plane concurente,

$$x^2 - a^2 = 0$$

reprezintă două plane paralele,

$$x^2 = 0$$

reprezintă un plan,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

reprezintă o dreaptă,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

reprezintă un punct, iar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \qquad x^2 + a^2 = 0$$

reprezintă mulţimi vide.

5.3.3 La o schimbare de reper, ecuaţia unei cuadrice

$$\begin{aligned} a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 \; &+2\,a_{12}\,xy + 2\,a_{13}\,xz + 2\,a_{23}\,yz \\ &+2a_{10}\,x + 2a_{20}\,y + 2\,a_{30}\,z + a_{00} = 0, \end{aligned}$$

se transformă într-o ecuaţie de aceeaşi formă, iar parametrii

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix}$$

nu îşi schimbă valoarea. Urmând analogia cu conicele, se poate obţine o clasificare a cuadricelor şi o metodă de reducere la forma canonică (redusă).

Capitolul 6

Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

6.1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

6.1.1 Definiţie. O *ecuaţie diferenţială de ordinul întâi* este o ecuaţie de forma

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.1}$$

unde x este variabila independentă, y funcţia necunoscută, y' derivata funcţiei necunoscute şi $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, I fiind un interval. Prin *soluţie* a ecuaţiei (6.1) se înţelege o funcţie derivabilă

$$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu $(a, b) \subseteq I$ şi astfel încât

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \qquad \forall x \in (a, b).$$

6.1.2 Definiţie. Spunem că ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y), \qquad \text{unde} \quad f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6.2}$$

este o ecuaţie diferenţială scrisă sub *formă normală*.
Prin *soluţie* a ecuaţiei (6.2) se înţelege o funcţie derivabilă

$$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât:

1) $(x, \varphi(x)) \in D, \qquad \forall x \in (a, b);$

2) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \qquad \forall x \in (a, b).$

6.1.3 Ecuaţia (6.2) se mai poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{6.3}$$

sau sub forma

$$\mathrm{d}y = f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{6.4}$$

numită *formă simetrică*. *Soluţia* ecuaţiei (6.4) se poate căuta sub forma

$$y = y(x)$$

sau

$$x = x(y)$$

sau, mai general, sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Ecuaţia (6.4) este caz particular pentru ecuaţia

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \qquad \text{unde} \quad P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

care este *forma generală a unei ecuaţii simetrice*.

Prin soluţie a ecuaţiei (6.5) se înţelege o pereche de aplicaţii derivabile

$$\varphi,\ \psi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât:

1) $(\varphi(t), \psi(t)) \in D, \qquad \forall t \in (a, b)$

2) $P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t) = 0, \qquad \forall t \in (a, b).$

6.1.4 Se ştie că dacă

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este o funcţie continuă, atunci funcţia

$$F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

este o primitivă a lui f, oricare ar fi $x_0 \in (a, b)$, adică avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x), \qquad \forall x \in (a, b).$$

6.1.5 Teoremă. *Fie* ecuaţia cu variabile separabile

$$y' = f(x)\, g(y), \tag{6.6}$$

unde $\begin{matrix} f : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ g : J \longrightarrow \mathbb{R} \end{matrix}$ *sunt funcţii continue definite pe intervalele* I *şi* J.

a) Dacă $y_0 \in J$ *este astfel încât* $g(y_0) = 0$, *atunci funcţia constantă*

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = y_0$$

este soluţie a ecuaţiei (6.6).

b) Dacă $y_0 \in J$ *este astfel încât* $g(y_0) \neq 0$, *atunci relaţia*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)}\, \mathrm{d}u = \int_{x_0}^{x} f(v)\, \mathrm{d}v + C, \tag{6.7}$$

unde $x_0 \in I$ *şi* C *este o constantă, defineşte implicit o soluţie locală* $y = y(x)$ *a ecuaţiei (6.6).*

Demonstraţie. a) Deoarece $\varphi'(x) = 0$ şi $g(\varphi(x)) = g(y_0) = 0$, rezultă că

$$\varphi'(x) = f(x)\, g(\varphi(x)), \qquad \forall x \in I.$$

b) Derivând relaţia (6.7) în raport cu x, considerând $y = y(x)$, rezultă

$$\frac{1}{g(y(x))}\, y'(x) = f(x),$$

adică

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)).$$

6.1.6 Exerciţiu. Să se rezolve ecuaţia

$$y' = xy.$$

Rezolvare. Funcţia constantă $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$ este soluţie a ecuaţiei. Scriind ecuaţia sub forma

$$\frac{y'}{y} = x, \qquad \text{echivalentă cu} \qquad (\ln y)' = x,$$

deducem că

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + c, \qquad \text{adică} \qquad y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}},$$

unde c şi $C_1 = \mathrm{e}^c$ sunt constante.

6.1.7 MATHEMATICA: `DSolve[eqns, y[x], x]`

```
In[1]:=DSolve[y'[x] == x y[x], y[x], x]
```
$\mapsto$ Out[1]=$\left\{\left\{\mathrm{y[x]}\to \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{C[1]}\right\}\right\}$

6.1.8 Ecuaţia (6.6) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\, g(y)$$

sau forma simetrică

$$f(x)\, g(y)\, \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$$

Forma diferenţială $f(x)\, g(y)\, \mathrm{d}x - \mathrm{d}y$ nu este diferenţiala totală a unei funcţii. Înmulţind ecuaţia anterioară cu *factorul integrant* $\frac{1}{g(y)}$, se obţine ecuaţia

$$f(x)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{g(y)}\, \mathrm{d}y = 0 \tag{6.8}$$

al cărei membru stâng este o diferenţială totală deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{g(y)}\right).$$

Ecuaţia (6.8) se poate scrie sub forma

$$\mathrm{d}F = 0,$$

unde

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Rezultă că relaţia $F(x,y) = C$, adică

$$\int_{x_0}^{x} f(u)du - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(v)}\, \mathrm{d}v = C$$

defineşte implicit o soluţie a ecuaţiei (6.6) dacă alegem y_0 astfel încât $g(y_0) \neq 0$.

6.1.9 Propoziţie. Ecuaţia omogenă

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile dacă se utilizează schimbarea de variabilă $y(x) = x\, z(x)$, unde $z(x)$ este noua funcţie necunoscută.

Demonstraţie. Derivând $y(x) = x\, z(x)$ obţinem relaţia $y'(x) = z(x) + x\, z'(x)$ care ne permite să scriem ecuaţia sub forma

$$z' = \frac{1}{x}\,(f(z) - z).$$

6.1.10 Propoziţie. Ecuaţia liniară omogenă

$$y' = f(x)\, y$$

are soluţia generală

$$y(x) = C\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t},$$

unde C este o constantă arbitrară.

Demonstraţie. Rezolvarea ecuaţiei poate fi prezentată dupa cum urmează

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\, y,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = f(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

$$\ln|y| - \ln|y_0| = \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

$$y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t}.$$

6.1.11 Exerciţiu. Să se rezolve ecuaţia

$$y' = x^2 y.$$

Rezolvare. Soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} t^2\, \mathrm{d}t}, \qquad \text{adică} \qquad y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}.$$

6.1.12 MATHEMATICA: `DSolve[eqns, y[x], x]`

```
In[1]:=DSolve[y'[x]==f[x] y[x], y[x], x]
```
$\mapsto$ Out[1]=$\left\{\left\{\mathrm{y[x]}\to \mathrm{e}^{\int_1^{\mathrm{x}} \mathrm{f[K[1]\,dK[1]}} \mathrm{C[1]}\right\}\right\}$

```
In[2]:=DSolve[y'[x]==x^2 y[x], y[x], x]
```
$\mapsto$ Out[2]=$\left\{\left\{\mathrm{y[x]}\to \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}^3}{3}} \mathrm{C[1]}\right\}\right\}$

6.1.13 Propoziţie. *Soluţia generală a* ecuaţiei liniare neomogene

$$y' = f(x)\, y + g(x) \tag{6.9}$$

se obţine adunând soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene asociate

$$y' = f(x)\, y \tag{6.10}$$

cu o soluţie particulară $\tilde{y}$ a ecuaţiei (6.9).

Demonstraţie. Dacă y verifică (6.10) şi $\tilde{y}$ verifică (6.9), atunci

$$(y+\tilde{y})'(x)=f(x)\,y(x)+f(x)\,y(x)+g(x)=f(x)\,(y+\tilde{y})(x)+g(x).$$

Dacă y şi $\tilde{y}$ verifică (6.9), atunci $y-\tilde{y}$ verifică (6.10)

$$(y-\tilde{y})'(x)=f(x)\,y(x)+g(x)-f(x)\,\tilde{y}(x)-g(x)=f(x)\,(y-\tilde{y})(x).$$

6.1.14 Propoziţie. *O soluţie particulară $\tilde{y}$ a ecuaţiei liniare neomogene*

$$y' = f(x)\,y + g(x)$$

poate fi găsită folosind metoda variaţiei constantei*, căutând-o de forma*

$$\tilde{y}(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}.$$

Demonstraţie. Înlocuind în ecuaţie, obţinem relaţia

$$C'(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}$$

care permite determinarea funcţiei $C(x)$.

6.1.15 Exerciţiu. Să se rezolve ecuaţia

$$y' = y + x.$$

6.1.16 MATHEMATICA: `DSolve[eqns, y[x], x]`

`In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x]+x, y, x]` $\mapsto$ Out[1]={{y[x]$\to -1-x-e^{x}$C[1]}}

6.1.17 Propoziţie. *Schimbarea de variabilă $z=y^{1-\alpha}$ permite reducerea ecuaţiei*

$$y' = f(x)\,y + g(x)\,y^{\alpha},$$

numită ecuaţia Bernoulli*, la o ecuaţie liniară.*

Demonstraţie. Dacă $\alpha = 1$, atunci ecuaţia este deja o ecuaţie liniară. În cazul $\alpha \neq 1$, împărţind cu y^{α} obţinem ecuaţia

$$y^{-\alpha}y' = f(x)\,y^{1-\alpha} + g(x)$$

care se poate scrie

$$\frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' = f(x)\,y^{1-\alpha} + g(x).$$

6.1.18 Propoziţie. Ecuaţia Riccati

$$y' = f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x)$$

se poate rezolva utilizând schimbarea de variabilă

$$y = y_p + \frac{1}{z}$$

în cazul în care se cunoaşte o soluţie particulară y_p.

Demonstraţie. În urma schimbării de variabilă indicate ecuaţia devine

$$z' = -(2f(x)\, y_p(x) - g(x))\, z - f(x)$$

adică o ecuaţie liniară.

6.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

6.2.1 Definiţie. O *ecuaţie diferenţială liniară de ordinul* n este o ecuaţie de forma

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \qquad (6.11)$$

unde

$$a_0,\, a_1,\, ...,\, a_n,\, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcţii continue definite pe un interval I şi $a_0(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I$. Prin *soluţie* a ecuaţiei (6.11) se înţelege o funcţie

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât:

1) φ admite derivate continue până la ordinul n;

2) $a_0(x)\, \varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\, \varphi^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)\, \varphi(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$

6.2.2 Teoremă (de existenţă şi unicitate). *Dacă*

$$a_0,\, a_1,\, ...,\, a_n,\, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcţii continue şi

$$a_0(x) \neq 0, \qquad \forall x \in I,$$

atunci ecuaţia diferenţială

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x)$$

admite pentru fiecare $(x_0, y_{00}, y_{01}, ..., y_{0n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$ *o unică soluţie*

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

$$\varphi(x_0) = y_{00}, \qquad \varphi'(x_0) = y_{01}, \quad ... \quad , \ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

6.2.3 Utilizând operatorul diferenţial

$$L = a_0(x)\,D^n + a_1(x)\,D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\,D + a_n(x),$$

unde

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,, \qquad D^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,, \quad ... \quad , \ D^n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n},$$

ecuaţia (6.11) se scrie

$$Ly = f.$$

Operatorul linar

$$L : C^n(I) \longrightarrow C^0(I),$$

unde

$C^n(I) = \{\, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi$ admite derivate continue până la ordinul n $\}$,

$C^0(I) = \{\, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi$ este funcţie continuă $\}$,

este un operator liniar

$$L(\alpha\,\varphi + \beta\,\psi) = \alpha\,L\varphi + \beta\,L\psi \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \ \forall \varphi, \psi \in C^n(I).$$

6.2.4 Teoremă. *Spaţiul*

$$\mathcal{V} = \{\ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \ \ L\varphi = 0\ \}$$

al tuturor soluţiilor ecuaţiei liniare omogene

$$Ly = 0,$$

este un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Demonstraţie. Dacă $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$, atunci

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L\varphi + \beta L\psi = 0$$

oricare ar fi α, $\beta \in \mathbb{R}$. Conform teoremei de existenţă şi unicitate, pentru $x_0 \in I$ fixat, aplicaţia

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad A\varphi = (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0))$$

este un izomorfism liniar. Rezultă că spaţiile vectoriale $\mathcal{V}$ şi $\mathbb{R}^n$ sunt izomorfe, şi prin urmare $\dim \mathcal{V} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

6.2.5 Rezolvarea ecuaţiei

$$Ly = 0$$

înseamnă determinarea spaţiului vectorial $\mathcal{V} = \{\ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid\ L\varphi = 0\ \}$ al tuturor soluţiilor, ceea ce se poate realiza indicând o bază $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, caz în care

$$\mathcal{V} = \{\, c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \mid\ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\ \}.$$

Funcţiile

$$y_1, y_2, \ldots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

din $\mathcal{V}$ formează o bază a lui $\mathcal{V}$ dacă sunt liniar independente, adică dacă

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ \cdots\ + \alpha_n y_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

6.2.6 Propoziţie. *Funcţiile*

$$y_1, y_2, \ldots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

din $\mathcal{V}$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă într-un punct fixat $x_0 \in I$ avem

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6.12}$$

Demonstraţie. Deoarece

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad A\varphi = (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0))$$

este un izomorfism liniar, funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă vectorii corespunzători

$$Ay_1 = (\, y_1(x_0),\, y_1'(x_0),\, \ldots,\, y_1^{(n-1)}(x_0)\,),$$

$$Ay_2 = (\, y_2(x_0),\, y_2'(x_0),\, \ldots,\, y_2^{(n-1)}(x_0)\,),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Ay_n = (\, y_n(x_0),\, y_n'(x_0),\, \ldots,\, y_n^{(n-1)}(x_0)\,)$$

sunt liniar independenţi, ceea ce este echivalent cu (6.12).

6.2.7 Teoremă (Abel-Liouville). *Dacă*

$$y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt n soluţii ale ecuaţiei

$$Ly = 0,$$

atunci funcţia (numită wronskian)

$$W : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

verifică relaţia

$$W(x) = W(x_0)\, \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, \mathrm{d}t}, \tag{6.13}$$

unde $x_0 \in I$ este un punct fixat.

Demonstraţie (cazul $n = 2$.) Arătăm că W verifică ecuaţia liniară

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, W(x).$$

În cazul $n = 2$, ecuaţia $Ly = 0$, adică

$$a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2\, y = 0$$

conduce la

$$y'' = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, y' - \frac{a_2(x)}{a_0(x)}\, y,$$

şi

$$\begin{aligned} W'(x) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = -\tfrac{a_1(x)}{a_0(x)}\, W(x). \end{aligned}$$

6.2.8 Din relaţia (6.13) rezultă că dacă W se anulează într-un punct din I, atunci se anulează în toate punctele.

6.2.9 Propoziţie. *Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene*

$$Ly = f$$

se obţine adunând la soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate

$$Ly = 0$$

o soluţie particulară $\tilde{y}$ a ecuaţiei neomogene.

Demonstraţie. Deoarece $L\tilde{y} = f$, obţinem

$$Ly{=}0 \implies L(y+\tilde{y}){=}f \qquad \text{şi} \qquad Ly{=}f \implies L(y-\tilde{y}){=}0.$$

6.2.10 Teoremă (Metoda variaţiei constantelor). *Dacă*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, y_k(x)$$

este soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$Ly = 0,$$

atunci o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$Ly = f$$

poate fi găsită căutând-o de forma

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k(x)$$

cu $c_1(x)$, $c_2(x)$, ... , $c_n(x)$ soluţie a sistemului

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\, y_k(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\, y_k'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\, y_k^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\, y_k^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases} \tag{6.14}$$

Demonstraţie. Ţinând sema de (6.14), obţinem relaţiile

$$\begin{aligned} &\tilde{y}(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k(x), \\ &\tilde{y}'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k'(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\tilde{y}^{(n-1)}(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x), \\ &\tilde{y}^{(n)}(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{aligned}$$

care conduc la

$$L\tilde{y} = a_0(x)\,\tilde{y}^{(n)} + a_1(x)\,\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,\tilde{y}' + a_n(x)\,\tilde{y}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\left(a_0(x)\,y_k^{(n)} + a_1(x)\,y_k^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y_k' + a_n(x)\,y_k\right) + f(x) = f(x).$$

6.2.11 Definiţie. Prin *ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi* se înţelege o ecuaţie de forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (6.15)$$

unde a_0, a_1, ..., a_n sunt numere reale şi $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

6.2.12 Ecuaţia (6.15) este un caz particular pentru ecuaţia (6.11) şi anume cel în care funcţiile $a_0(x)$, $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$ sunt funcţii constante. Ecuaţia (6.15) se poate scrie sub forma

$$P(D)y = f,$$

unde P este polinomul

$$P(r) = a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n,$$

numit *polinomul caracteristic* asociat ecuaţiei considerate.

6.2.13 Folosind notaţia lui Euler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi,$$

definim pentru fiecare număr complex $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ funcţia complexă

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \,:\, x \mapsto \mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

cu proprietăţile

$$D\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x},$$
$$\mathfrak{Re}\ (D\,\mathrm{e}^{rx}) = D(\,\mathfrak{Re}\ \mathrm{e}^{rx}\,),$$
$$\mathfrak{Im}\ (D\,\mathrm{e}^{rx}) = D(\,\mathfrak{Im}\ \mathrm{e}^{rx}\,),$$

unde $\mathfrak{Re}\ z$ şi $\mathfrak{Im}\ z$ reprezintă partea reală şi repectiv imaginară a numărului z.

6.2.14 Propoziţie. *Funcţia*

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad y(x) = \mathrm{e}^{rx},$$

este soluţie a ecuaţiei omogene

$$P(D)y = 0$$

dacă şi numai dacă r este rădăcină a polinomului caracteristic, adică

$$a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n = 0.$$

Demonstraţie. Deoarece $D^k \mathrm{e}^{rx} = r^k \mathrm{e}^{rx}$ şi

$$P(D)\, \mathrm{e}^{rx} = (\, a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n\,)\mathrm{e}^{rx}$$

avem

$$P(D)\, \mathrm{e}^{rx} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(r) = 0.$$

6.2.15 Propoziţie. *Dacă polinomul caracteristic $P(r)$ are rădăcinile r_1, r_2, ... , r_k cu multiplicităţile m_1, m_2, ... , m_k , adică*

$$P(r) = a_0\, (r - r_1)^{m_1}\, (r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k},$$

atunci $P(D)$ admite factorizarea

$$P(D) = a_0\, (D - r_1)^{m_1}\, (D - r_2)^{m_2} \cdots (D - r_k)^{m_k}$$

ordinea factorilor putând fi schimbată fără a afecta rezultatul.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din liniaritatea lui D şi din relaţia $D^p\, D^q = D^{p+q}$.

6.2.16 Propoziţie. *Dacă $Q(r)$ este un polinom şi $\varphi(x)$ este o funcţie, atunci*

$$Q(D)\, (\mathrm{e}^{rx}\, \varphi) = \mathrm{e}^{rx}\, Q(D + r)\varphi,$$

oricare ar fi $r \in \mathbb{C}$.

Demonstraţie. Arătăm mai întâi prin inducţie că

$$D^k\, (\mathrm{e}^{rx}\, \varphi) = \mathrm{e}^{rx}\, (D + r)^k \varphi.$$

Avem

$$D\, (\mathrm{e}^{rx}\, \varphi) = \mathrm{e}^{rx}\, D\varphi + r\mathrm{e}^{rx}\, \varphi = \mathrm{e}^{rx}\, (D + r)\varphi.$$

Presupunând că $D^k\, (\mathrm{e}^{rx}\, \varphi) = \mathrm{e}^{rx}\, (D + r)^k \varphi$, obţinem

$$D^{k+1}\, (\mathrm{e}^{rx}\, \varphi) = D(\mathrm{e}^{rx}\, (D + r)^k \varphi) = \mathrm{e}^{rx}(D + r)(D + r)^k \varphi = \mathrm{e}^{rx}\, (D + r)^{k+1} \varphi.$$

Dacă $Q(r) = \alpha_0\, r^m + \alpha_1\, r^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} r + \alpha_m$, atunci

$$\begin{aligned} Q(D)\,(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) &= \alpha_0\; D^m(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi)+\alpha_1\,D^{m-1}(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi)+\cdots+\alpha_{m-1}\,D(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi)+\alpha_m\mathrm{e}^{rx}\,\varphi \\ &= \mathrm{e}^{rx}\,[\alpha_0\;(D+r)^m+\alpha_1\,(D+r)^{m-1}+\cdots+\alpha_{m-1}\,(D+r)+\alpha_m]\varphi \\ &= \mathrm{e}^{rx}\,Q(D+r)\varphi. \end{aligned}$$

6.2.17 Propoziţie. *Soluţia generală a ecuaţiei*

$$(D-r)^k y = 0$$

este

$$y(x) = c_0\,\mathrm{e}^{rx} + c_1\,x\,\mathrm{e}^{rx} + \cdots + c_{k-1}\,x^{k-1}\mathrm{e}^{rx}.$$

Demonstraţie. Conform propoziţiei anterioare avem relaţa

$$D^k\,(\mathrm{e}^{-rx}\,y) = \mathrm{e}^{-rx}\,(D-r)^k y$$

care arată că ecuaţia $(D-r)^k y = 0$ este echivalentă cu ecuaţia

$$D^k\,(\mathrm{e}^{-rx}\,y) = 0$$

care implică

$$\mathrm{e}^{-rx}\,y(x) = c_0\; + c_1\,x + \cdots + c_{k-1}\,x^{k-1},$$

adică

$$y(x) = c_0\,\mathrm{e}^{rx} + c_1\,x\,\mathrm{e}^{rx} + \cdots + c_{k-1}\,x^{k-1}\mathrm{e}^{rx}.$$

6.2.18 Propoziţie. *Fie ecuaţia diferenţială liniară omogenă cu coeficienţi reali*

$$P(D)y = 0,$$

unde $P(r) = a_0\,r^n + a_1\,r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,r + a_n$ *este polinomul caracteristic.*

a) Dacă r_j *este rădăcină reală a lui* P *cu multiplicitatea* m_j*, atunci funcţiile*

$$\mathrm{e}^{r_j x},\quad x\,\mathrm{e}^{r_j x},\quad \cdots\quad ,\; x^{m_j-1}\mathrm{e}^{r_j x}$$

sunt soluţii particulare ale ecuaţiei $P(D)y = 0$*.*

b) Dacă $r_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$ *este rădăcină complexă a lui* P *cu multiplicitatea* m_j*, atunci*

$$\mathrm{e}^{\alpha_j x}\cos(\beta_j\,x),\quad x\,\mathrm{e}^{\alpha_j x}\cos(\beta_j\,x),\quad \cdots\quad ,\; x^{m_j-1}\mathrm{e}^{\alpha_j x}\cos(\beta_j\,x),$$

$$\mathrm{e}^{\alpha_j x}\sin(\beta_j\,x),\quad x\,\mathrm{e}^{\alpha_j x}\sin(\beta_j\,x),\quad \cdots\quad ,\; x^{m_j-1}\mathrm{e}^{\alpha_j x}\sin(\beta_j\,x)$$

sunt soluţii particulare ale ecuaţiei $P(D)y = 0$*.*

Demonstraţie. Ecuaţia $P(D)y = 0$ admite o factorizare de forma

$$Q(D)\,(D-r_j)^{m_j}y=0$$

şi $(D-r_j)^{m_j}y=0$ implică $P(D)y=0$. Deoarece ec. $P(D)y=0$ are coeficienţi reali

$$P(D)y=0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} P(D)\,(\mathfrak{Re}\ y)=\mathfrak{Re}\ (\,P(D)y\,)=0 \\ \\ P(D)\,(\mathfrak{Im}\ y)=\mathfrak{Im}\ (\,P(D)y\,)=0 \end{cases}$$

adică în cazul în care r_j este rădăcină complexă cu multiplicitatea m_j funcţiile

$$y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad y(x)=\mathfrak{Re}\,\left(c_0\,\mathrm{e}^{r_jx}+c_1\,x\,\mathrm{e}^{r_jx}+\cdots+c_{m_j-1}\,x^{m_j-1}\mathrm{e}^{r_jx}\right)$$

şi

$$y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad y(x)=\mathfrak{Im}\,\left(c_0\,\mathrm{e}^{r_jx}+c_1\,x\,\mathrm{e}^{r_jx}+\cdots+c_{m_j-1}\,x^{m_j-1}\mathrm{e}^{r_jx}\right)$$

sunt soluţii ale ecuaţiei $P(D)y=0$, oricare ar fi constantele reale c_0, c_1, ... , c_{m_j-1}.

6.2.19 Se poate demonstra că, în toate cazurile, în spaţiul soluţiilor există o bază formată din soluţii particulare de tipul celor prezentate în propoziţia anterioară.

6.2.20 Exerciţiu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiilor

$$a)\quad y''-5y'+6y=0,$$

$$b)\quad y'''-6y''+12y'-8y=0,$$

$$c)\quad y''+y'+y=0,$$

$$d)\quad (D^2-D+1)^3y=0,$$

$$e)\quad (D-3)^4(D^2+2)^2y=0.$$

Răspuns.

$$a)\quad y(x)=c_1\,\mathrm{e}^{2x}+c_2\,\mathrm{e}^{3x}.$$

$$b)\quad y(x)=c_1\,\mathrm{e}^{2x}+c_2\,x\,\mathrm{e}^{2x}+c_3\,x^2\,\mathrm{e}^{2x}.$$

$$c)\quad y(x)=c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)+c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x).$$

$$\begin{aligned} d)\quad y(x) &= c_1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)+c_2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) \\ &\quad +c_3\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)+c_4\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) \\ &\quad +c_5\,x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)+c_6\,x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e)\quad y(x) &= c_1\,\mathrm{e}^{3x}+c_2\,x\,\mathrm{e}^{3x}+c_3\,x^2\,\mathrm{e}^{3x}+c_4\,x^3\,\mathrm{e}^{3x} \\ &\quad +c_5\,\cos(\sqrt{2}x)+c_6\,\sin(\sqrt{2}x)+c_7\,x\,\cos(\sqrt{2}x)+c_8\,x\,\sin(\sqrt{2}x). \end{aligned}$$

6.2.21 **MATHEMATICA:** `DSolve[eqns, y[x], x]`

```
In[1]:=DSolve[y''[x] - 5 y'[x] + 6 y[x] == 0, y[x], x]
```
$\mapsto$ Out[1]=$\{\{y[x]\to e^{2x}\,C[1]+e^{3x}\,C[2]\}\}$

```
In[2]:=DSolve[y'''[x] - 6 y''[x] + 12 y'[x] - 8 y[x] == 0, y[x], x]
```
$\mapsto$ Out[2]=$\{\{y[x]\to e^{2x}\,C[1]+e^{2x}\,x\,C[2]+e^{2x}\,x^2\,C[3]\}\}$

```
In[3]:=DSolve[y''[x] + y'[x] + y[x] == 0, y[x], x]
```
$\mapsto$ Out[3]=$\left\{\left\{y[x]\to e^{-x/2}\,C[2]\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]+e^{-x/2}\,C[1]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]\right\}\right\}$

6.2.22 **Propoziţie**. Ecuaţia Euler

$$a_0\,x^n\,y^{(n)} + a_1\,x^{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\,x\,y' + a_n\,y = 0$$

se reduce la o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de variabilă $x = \mathrm{e}^t$*, unde* t *este noua variabilă independentă.*

Demonstraţie (cazul $n = 3$). Notând cu $z(t)$ noua funcţie necunoscută, avem relaţia

$$y(x) = z(\ln x)$$

care, prin derivări succesive, conduce la

$y'(x) = \frac{1}{x}\,z'(\ln x) = \mathrm{e}^{-t}\,z'(t)$,

$y''(x) = \frac{1}{x^2}\,z''(\ln x) - \frac{1}{x^2}\,z'(\ln x) = \mathrm{e}^{-2t}\,(\,z''(t) - z'(t)\,)$,

$y'''(x) = \frac{1}{x^3}\,z'''(\ln x) - \frac{3}{x^3}\,z''(\ln x) - \frac{2}{x^3}\,z'(\ln x) = \mathrm{e}^{-3t}\,(\,z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)\,)$.

În urma schimbării de variabilă, ecuaţia Euler

$$a_0\,x^3\,y''' + a_1\,x^2\,y'' + a_2\,x\,y' + a_3\,y = 0$$

devine

$$a_0\,z''' + (-3a_0 + a_1)z'' + (2a_0 - a_1 + a_2)z' + a_3 z = 0.$$

6.2.23 Relaţia $x = \mathrm{e}^t$, echivalentă cu $t = \ln x$, conduce la

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

Ecuaţia Euler se poate scrie

$$\left(a_0\,x^n\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1\,x^{n-1}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\,x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_n\right) y = 0$$

şi, formal, schimbarea de variabilă $x = \mathrm{e}^t$ în ecuaţia Euler se poate realiza înlocuind x cu e^t şi operatorul de derivare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ cu $\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. De remarcat că

$$\left(\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{e}^{-2t}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

6.3 Sisteme diferenţiale liniare

6.3.1 Definiţie. Prin *sistem diferenţial liniar de ordinul întâi* se înţelege un sistem de ecuaţii diferenţiale de forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{6.16}$$

unde x este variabila independentă, y_1, y_2, ... , y_n sunt funcţiile necunoscute şi

$$\begin{matrix} a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}, \end{matrix} \quad \text{unde} \quad i, j \in \{1, 2, ..., n\},$$

sunt funcţii continue definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

6.3.2 Sistemul diferenţial liniar (6.16) se poate scrie sub forma matriceală

$$Y' = A(x)Y + F(x)$$

utilizând notaţiile

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

6.3.3 Teoremă (de existenţă şi unicitate). *Dacă*

$$\begin{matrix} a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}, \end{matrix} \quad \textit{unde} \quad i, j \in \{1, 2, ..., n\},$$

sunt funcţii continue, atunci oricare ar fi $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) \in I \times \mathbb{R}^n$, *există o unică soluţie* $Y(x)$ *încât*

$$Y' = A(x)\,Y + F(x) \qquad \text{şi} \qquad Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

6.3.4 Teoremă. *Spaţiul $\mathcal{V}$ al tuturor soluţiilor sistemului diferenţial liniar omogen*

$$Y' = A(x)\,Y$$

este un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Demonstraţie. Pentru $x_0 \in I$ fixat, din teorema de existenţă şi unicitate, rezultă că aplicaţia liniară

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n :\ Y \mapsto Y(x_0)$$

este un izomorfism liniar.

6.3.5 Rezolvarea sistemului omogen $Y' = AY$ este echivalentă cu găsirea unei baze a lui $\mathcal{V}$, adică cu găsirea a n soluţii liniar independente.

6.3.6 Definiţie. Plecând de la n soluţii ale sistemului omogen $Y' = A(x)Y$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad , \ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},$$

construim *matricea Wronski*

$$W = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

şi *wronskianul*

$$w = \det W.$$

6.3.7 Teoremă. *Soluţiile Y_1, Y_2, ... , Y_n formează o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ dacă şi numai dacă wronskianul lor este nenul într-un punct fixat $x_0 \in I$, adică*

$$w(x_0) \neq 0.$$

Demonstraţie. Deoarece

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n :\ Y \mapsto Y(x_0)$$

este un izomorfism liniar, soluţiile Y_1, Y_2, ... , Y_n sunt liniar independente dacă şi numai dacă vectorii $Y_1(x_0)$, $Y_2(x_0)$, ... , $Y_n(x_0)$ din $\mathbb{R}^n$ sunt liniar independenţi, ceea ce este echivalent cu $w(x_0) \neq 0$.

6.3.8 Teoremă. *Wronskianul soluţiilor Y_1, Y_2, ... , Y_n verifică relaţia*

$$w(x) = w(x_0)\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(t)\,\mathrm{d}t}, \tag{6.17}$$

unde $\operatorname{tr} A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)$ *este* urma *matricei* $A(t)$.

Demonstraţie (cazul $n = 2$.) Avem

$$w'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y'_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y'_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y'_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(x)\,y_{11}(x)+a_{12}(x)\,y_{21}(x) & y_{12}(x) \\ a_{21}(x)\,y_{11}(x)+a_{22}(x)\,y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & a_{11}(x)\,y_{12}(x)+a_{12}(x)\,y_{22}(x) \\ y_{21}(x) & a_{21}(x)\,y_{12}(x)+a_{22}(x)\,y_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}(x) + a_{22}(x))\,w(x),$$

adică w verifică ecuaţia diferenţială liniară

$$w' = \operatorname{tr} A(x)\; w.$$

6.3.9 Din relaţia (6.13) rezultă că dacă wronskianul se anulează într-un punct $x_0 \in I$, atunci el se anulează în toate punctele $x \in I$.

6.3.10 Propoziţie. *Soluţia generală a sistemului liniar neomogen*

$$Y' = A(x)\,Y + F(x)$$

se obţine adunând la soluţia generală a sistemului liniar omogen asociat

$$Y' = A(x)\,Y$$

o soluţie particulară $\tilde{Y}$ *a sistemului neomogen.*

Demonstraţie. Deoarece $\tilde{Y}' = A(x)\,Y + F(x)$, obţinem

$$Y' = A(x)\,Y \implies (Y+\tilde{Y})' = A(x)\,(Y+\tilde{Y}) + F(x),$$

$$Y' = A(x)\,Y + F(x) \implies (Y-\tilde{Y})' = A(x)\,(Y-\tilde{Y}).$$

6.3.11 Folosind matricea Wronski W asociată unei baze $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ a lui $\mathcal{V}$, soluţia generală

$$Y = c_1\,Y_1 + c_2\,Y_2 + \cdots + c_n\,Y_n$$

a ecuaţiei liniare omogene $Y' = A(x)\,Y$ se poate scrie sub forma

$$Y(x) = W(x)\,C, \qquad \text{unde} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

6.3.12 Teoremă (Metoda variaţiei constantelor).

Dacă soluţia generală a sistemului

$$Y' = A(x)\,Y$$

este $Y(x) = W(x)\,C$*, atunci o soluţie particulară sistemului neomogen*

$$Y' = A(x)\,Y + F(x)$$

se poate obţine căutând-o de forma

$$\tilde{Y}(x) = W(x)\,C(x),$$

unde $C(x)$ *este o soluţie a sistemului*

$$C'(x) = W^{-1}(x)\,F(x).$$

Demonstraţie. Deoarece $W' = A(x)W$ şi $\tilde{Y}'(x) = W'(x)\,C(x) + W(x)\,C'(x)$, avem

$$\tilde{Y}' = A(x)\,\tilde{Y} + F(x)$$

dacă şi numai dacă $W(x)\,C'(x) = F(x)$.

6.3.13 Definiţie. Prin *sistem diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi* se înţelege un sistem de ecuaţii de forma

$$Y' = AY, \qquad \text{unde} \qquad A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

6.3.14 Propoziţie. *Funcţia vectorială* $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$*,* $Y(x) = w\,\mathrm{e}^{\lambda x}$*, unde*

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

verifică relaţia

$$Y' = AY$$

dacă şi numai dacă

$$Aw = \lambda w.$$

Demonstraţie. Deoarece $Y'(x)=\lambda w\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, înlocuind în $Y'=AY$ obţinem $Aw=\lambda w$.

6.3.15 Fie λ o rădăcină a polinomului caracteristic

$$\det(A-\lambda I)=0.$$

Dacă $\lambda\in\mathbb{R}$, atunci λ este valoare proprie a matricei A şi alegând un vector propriu corespunzător $w\in\mathbb{R}^n$ obţinem soluţia netrivială $Y(x)=w\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ a sistemului $Y'=AY$. Dacă $\lambda\notin\mathbb{R}$, atunci există $w\in\mathbb{C}^n$ astfel încât $Aw=\lambda w$ şi

$$Y_1(x)=\mathfrak{Re}\left(w\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right),\qquad Y_2(x)=\mathfrak{Im}\left(w\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right)$$

sunt soluţii ale sistemului $Y'=AY$.

6.3.16 Exerciţiu. Să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1'=y_1+y_2\\ y_2'=-y_1+y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

are rădăcinile $\lambda_1=1+\mathrm{i}$ şi $\lambda_2=1-\mathrm{i}$. O soluţie particulară a ecuaţiei $Av=(1+\mathrm{i})v$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2 \end{pmatrix}=(1+\mathrm{i})\begin{pmatrix} v_1\\ v_2 \end{pmatrix}$$

este $v=\begin{pmatrix} 1\\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$. Rezultă că soluţia generală a sistemului este

$$\begin{aligned} Y(x) &= c_1\,\mathfrak{Re}\left\{\begin{pmatrix} 1\\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right\}+c_2\,\mathfrak{Im}\left\{\begin{pmatrix} 1\\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right\}\\ &= c_1\,\mathfrak{Re}\left\{\begin{pmatrix} 1\\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}(\cos x+\mathrm{i}\,\sin x)\right\}+c_2\,\mathfrak{Im}\left\{\begin{pmatrix} 1\\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}(\cos x+\mathrm{i}\,\sin x)\right\}\\ &= c_1\begin{pmatrix} \cos x\\ -\sin x \end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}+c_2\begin{pmatrix} \sin x\\ \cos x \end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}, \end{aligned}$$

adică

$$\begin{cases} y_1(x)=c_1\,\mathrm{e}^{x}\,\cos x+c_2\,e^{x}\,\sin x\\ y_2(x)=-c_1\,\mathrm{e}^{x}\,\sin x+c_2\,e^{x}\,\cos x. \end{cases}$$

6.3.17 MATHEMATICA: `DSolve[{eqn1, eqn2}, {y1[x], y2[x]}, x]`

```
In[1]:=DSolve[{y1'[x] == y1[x]+y2[x],y2'[x] == -y1[x]+y2[x]},{y1[x], y2[x]},x]
```

↦ Out[1]={{y1[x]→e^x C[1] Cos[x]+e^x C[2] Sin[x], y2[x]→e^x C[2] Cos[x]−e^x C[1] Sin[x]}}

6.3.18 Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă şi $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, unde

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \qquad \cdots \qquad v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix},$$

este o bază a lui $\mathbb{R}^n$ formată din vectori proprii ai lui A corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2, ... , λ_n (distincte sau nu), atunci soluţia generală a sistemului $Y' = AY$ este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

6.3.19 Exerciţiu. Să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Rezolvare. Rezolvând ecuaţia

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

obţinem $\lambda_1 = 2$, şi $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Deoarece subspaţiile proprii corespunzătoare sunt

$$V_2 = \{\, \alpha(1,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}, \qquad V_{-1} = \{\, \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) \mid \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \,\},$$

rezultă că soluţia generală a sistemului este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}.$$

6.3.20 MATHEMATICA: `DSolve[{eqn1, eqn2, eqn3}, {y1[x], y2[x], y3[x]}, x]`

```
In[1]:=Eigenvalues[[{0,1,1},{1,0,1},{1,1,0}]]
```
$\mapsto$ Out[1]={2,−1,−1}

```
In[2]:=Eigenvectors[[{0,1,1},{1,0,1},{1,1,0}]]
```
$\mapsto$ Out[2]={{1,1,1},{−1,0,1},{−1,1,0}}

```
In[3]:=DSolve[{y1'[x]==y2[x]+y3[x], y2'[x]==y1[x]+y3[x],
                                    y3'[x]==y1[x]+y2[x]}, {y1[x],y2[x],y3[x]}, x]
```
$\mapsto$ Out[3]=$\Big\{\Big\{$y1[x]$\to\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(2+\mathrm{e}^{3x})$ C[1]$+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(-1+\mathrm{e}^{3x})$ C[2]$+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(-1+\mathrm{e}^{3x})$ C[3],
y2[x]$\to\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(-1+\mathrm{e}^{3x})$ C[1]$+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(2+\mathrm{e}^{3x})$ C[2]$+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(-1+\mathrm{e}^{3x})$ C[3],
y3[x]$\to\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(-1+\mathrm{e}^{3x})$ C[1]$+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(-1+\mathrm{e}^{3x})$ C[2]$+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(2+\mathrm{e}^{3x})$ C[3]$\Big\}\Big\}$

6.3.21 Ştim că, în general, o matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ nu este diagonalizabilă. Dacă λ este o rădăcină reală (respectiv, complexă) cu multiplicitatea m a polinomului caracteristic, atunci partea din soluţia generală corespunzătoare lui λ poate fi găsită căutând-o de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x^{m-1} + \alpha_{12}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{1m-1}x + \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}x^{m-1} + \alpha_{22}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{2m-1}x + \alpha_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}x^{m-1} + \alpha_{n2}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{nm-1}x + \alpha_{1m} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda x},$$

unde coeficienţii α_{jk} sunt reali (respectiv, complecşi). În cazul complex, în final se separă părţile reală şi imaginară ale a soluţiei găsite.

6.3.22 Exerciţiu. Să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_2 + 4y_3 \\ y_3' = y_1 - 4y_3 \end{cases}$$

Rezolvare. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$, iar subspaţiile proprii corespunzătoare

$$V_0 = \{\, \alpha(4,4,1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}, \qquad V_{-3} = \{\, \alpha(1,-2,1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}.$$

Deoarece $\dim V_{-3} = 1$, rezultă că matricea sistemului nu este diagonalizabilă. Căutând partea din soluţia generală referitoare la $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x},$$

găsim

$$Y(x) = \alpha_1 \begin{pmatrix} x \\ -2x+1 \\ x-1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x}.$$

Soluţia generală a sistemului este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ -2x+1 \\ x-1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x}.$$

6.3.23 O altă metodă de rezolvare a sistemelor liniare omogene cu coeficienţi constanţi, numită *metoda eliminării*, se bazează pe faptul că fiecare dintre funcţiile necunoscute y_j verifică o ecuaţie diferenţială liniară.

6.3.24 Exerciţiu. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_1. \end{cases}$$

Rezolvare. Funcţia necunoscută y_1 verifică ecuaţia liniară

$$y_1''' - y_1 = 0.$$

Deoarece $P(r) = r^3 - 1$ are rădăcinile $r_1 = 1$ şi $r_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă că

$$y_1(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Prin derivarea lui y_1, se obţin y_2 şi y_3.

6.3.25 Deoarece izomorfismul de spaţii vectoriale

$$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^{n^2}:$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$$

permite identificarea spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ cu $\mathbb{K}^{n^2}$, aplicaţia

$$||\cdot|| : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \left|\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

este o normă pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. În particular, o serie de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,A^k$$

este *convergentă* dacă există limita

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k\,A^k$$

adică dacă există $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$\lim_{m\to\infty} \left|\left| \sum_{k=0}^{m} a_k\,A^k \;-\; B \right|\right| = 0.$$

6.3.26 Propoziţie. *Dacă seria de puteri*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

are raza de convergenţă $R > 0$ *şi dacă* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *este astfel încât* $||A|| < R$*, atunci seria de matrice*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, A^k$$

este convergentă.

Demonstraţie. Alegând r astfel încât $||A|| < r < R$ obţinem relaţia

$$\left|\left|a_k\, A^k\right|\right| = |a_k| \ \left|\left|A^k\right|\right| \leq |a_k|\, ||A||^k < |a_k|\, r^k.$$

Seria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, r^k$ fiind absolut convergentă, din criteriul comparaţiei rezultă că seria $\sum_{k=0}^{\infty} ||a_k\, A^k||$ este convergentă, ceea ce implică convergenţa seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, A^k$.

6.3.27 Deoarece seria exponenţială

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

are raza de convergenţă $r = \infty$, rezultă că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ putem defini matricea

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots,$$

numită *exponenţiala matricei* A. Se poate arăta că funcţia matriceală

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : \ t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$$

este derivabilă şi că $(\mathrm{e}^{tA})' = A\,\mathrm{e}^{tA}$ adică

$$Y(t) = \mathrm{e}^{tA} C$$

este soluţie a sistemului liniar $Y' = AY$, oricare ar fi $C \in \mathbb{R}^n$.

6.3.28 MATHEMATICA: `Series[Exp[A], {A, 0, n}]`

`In[1]:=Series[Exp[A], {A, 0, 4}]` $\mapsto$ Out[1]=$1+\mathrm{A}+\frac{\mathrm{A}^2}{2}+\frac{\mathrm{A}^3}{6}+\frac{\mathrm{A}^4}{24}+0[\mathrm{A}]^5$

6.3.29 Exerciţiu. Să se determine soluţia sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

este diagonalizabilă

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{unde} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$A = S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1},$$

obţinem

$$A^k = S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

şi

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} S^{-1},$$

relaţie care permite scrierea explicită a soluţiei generale.

6.3.30 MATHEMATICA: `Eigenvalues[A]`, `Eigenvectors[A]`, `MatrixForm[MatrixExp[tA]]`

`In[1]:=MatrixForm[[{0,1,1},{1,0,1},{1,1,0}]]` $\mapsto$ Out[1]= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

`In[2]:=Eigenvalues[{{0,1,1},{1,0,1},{1,1,0}}]` $\mapsto$ Out[2]={2,−1,−1}

`In[3]:=Eigenvectors[{{0,1,1},{1,0,1},{1,1,0}}]` $\mapsto$ Out[3]={{1,1,1},{−1,0,1},{−1,1,0}}

`In[4]:=MatrixForm[MatrixExp[t {{0, 1, 1}, {1, 0, 1}, {1, 1, 0}}]]`

$$\mapsto \text{Out[4]}= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}\left(2+e^{3t}\right) & \frac{1}{3}e^{-t}\left(-1+e^{3t}\right) & \frac{1}{3}e^{-t}\left(-1+e^{3t}\right) \\ \frac{1}{3}e^{-t}\left(-1+e^{3t}\right) & \frac{1}{3}e^{-t}\left(2+e^{3t}\right) & \frac{1}{3}e^{-t}\left(-1+e^{3t}\right) \\ \frac{1}{3}e^{-t}\left(-1+e^{3t}\right) & \frac{1}{3}e^{-t}\left(-1+e^{3t}\right) & \frac{1}{3}e^{-t}\left(2+e^{3t}\right) \end{pmatrix}$$

Capitolul 7

Reprezentări liniare

Vom prezenta câteva elemente referitoare la grupuri şi reprezentările lor liniare.

7.1 Grupuri

7.1.1 Definiţie. Prin *grup* se înţelege o mulţime G pe care este definită o lege de compoziţie internă

$$G \times G \longrightarrow G : \ (x, y) \mapsto x\, y$$

satisfăcând condiţiile:

1) $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3), \quad \forall g_1,\, g_2,\, g_3 \in G$;

2) există $e \in G$ astfel încât $ge = eg = g, \quad \forall g \in G$;

3) oricare ar fi $g \in G$, există $g^{-1} \in G$ astfel încât $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Grupul este numit *grup comutativ* (sau abelian) dacă, în plus,

4) $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1,\, g_2 \in G$.

7.1.2 Propoziţie. *a) Elementul e cu proprietatea*

$$ge = eg = g, \quad \forall g \in G$$

este unic în G şi se numeşte element neutru.

b) Pentru orice $g \in G$, elementul g^{-1} cu proprietatea

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

este unic în G şi se numeşte inversul *lui g.*

Demonstraţie. Avem

$$\left.\begin{array}{l} ge = eg = g, \quad \forall g \in G \\ ge' = e'g = g, \quad \forall g \in G \end{array}\right\} \implies e = ee' = e'$$

şi

$$\left.\begin{array}{r} gg^{-1} = g^{-1}g = e \\ gh = hg = e \end{array}\right\} \implies h = he = h(gg^{-1}) = (hg)g^{-1} = eg^{-1} = g^{-1}.$$

7.1.3 În cazul în care în locul notaţiei multiplicative g_1g_2 se utilizează notaţia aditivă g_1+g_2, elementul neutru este notat cu 0. Elementul h cu proprietatea $h + g = g + h = 0$ este notat cu $-g$ şi numit *opusul* lui g.

7.2 Reprezentări liniare

7.2.1 Definiţie. Fie G şi G' două grupuri. O aplicaţie

$$f : G \longrightarrow G'$$

este numită *morfism de grupuri* dacă

$$f(g_1g_2) = f(g_1)\, f(g_2), \qquad \forall g_1,\, g_2 \in G.$$

7.2.2 Mulţimea tuturor automorfismelor unui spaţiu vectorial $\mathcal{V}$

$$GL(\mathcal{V}) = \{\, A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \mid A \text{ este liniară şi bijectivă } \}$$

împreună cu operaţia de compunere este grup (*grupul automorfismelor* lui $\mathcal{V}$).

7.2.3 Definiţie. Prin *reprezentare liniară* a grupului G în spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ peste corpul $\mathbb{K}$ (numită şi *reprezentare $\mathbb{K}$-liniară*) se înţelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}) : \ g \mapsto T(g),$$

adică o aplicaţie astfel încât

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)\, T(g_2), \qquad \forall g_1,\, g_2 \in G.$$

Dimensiunea reprezentării este prin definiţie dimensiunea lui $\mathcal{V}$.

7.2.4 Mulţimea matricelor inversabile de ordinul n cu elemente din $\mathbb{K}$

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{\, A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \ \det A \neq 0 \,\}$$

împreună cu înmulţirea matricelor este grup (numit *grupul general linear*).

7.2.5 Definiţie. Prin *reprezentare matriceală* n-dimensională a unui grup G se înţelege un morfism de grupuri de forma

$$T : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : \ g \mapsto T(g).$$

Reprezentarea este numită reală în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ şi complexă în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7.2.6 Propoziţie. *Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{V}$ şi*

$$T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}) : \ g \mapsto T(g)$$

o reprezentare liniară a unui grup G în $\mathcal{V}$, atunci aplicaţia

$$\mathcal{T} : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}),$$

$$\mathcal{T}(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & t_{12}(g) & \cdots & t_{1n}(g) \\ t_{21}(g) & t_{22}(g) & \cdots & t_{2n}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & t_{n2}(g) & \cdots & t_{nn}(g) \end{pmatrix},$$

unde elementele $t_{ij}(g)$ sunt astfel încât

$$T(g)e_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}(g) e_i, \qquad \forall g \in G, \ \ \forall j \in \{1, 2, ..., n\},$$

este o reprezentare matriceală n-dimensională a lui G.

Demonstraţie. Deoarece $T(g_1g_2) = T(g_1)\,T(g_2)$, din relaţiile

$$\begin{aligned} T(g_1g_2)e_j &= \textstyle\sum_{i=1}^n t_{ij}(g_1g_2)e_i, \\ T(g_1)\,T(g_2)e_j &= T(g_1)\textstyle\sum_{k=1}^n t_{kj}(g_2)e_k = \sum_{k=1}^n t_{kj}(g_2)T(g_1)e_k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n t_{kj}(g_2)\sum_{i=1}^n t_{ik}(g_1)e_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n t_{ik}(g_1)t_{kj}(g_2)\right) e_i \end{aligned}$$

rezultă că

$$t_{ij}(g_1g_2) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}(g_1)\,t_{kj}(g_2), \qquad \forall i,j \in \{1,2,...,n\},$$

adică $\mathcal{T}(g_1g_2) = \mathcal{T}(g_1)\,\mathcal{T}(g_2)$.

7.2.7 Matricea $\mathcal{T}(g)$ este matricea transformării liniare $T(g) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ în raport cu baza considerată. Alegând o altă bază $\{e_1', e_2', ..., e_n'\}$, se poate defini în mod similar reprezentarea

$$\mathcal{T}' : G \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}) :\ g \mapsto \mathcal{T}'(g).$$

Ştim însă că cele două reprezentări matriceale sunt legate prin relaţia

$$\mathcal{T}'(g) = S^{-1}\,\mathcal{T}(g)\,S, \qquad \forall g \in G,$$

unde S este matricea de trecere de la baza $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la $\{e_1', e_2', ..., e_n'\}$.

7.2.8 Definiţie. Două reprezentări matriceale n-dimensionale peste $\mathbb{K}$ ale unui grup

$$\mathcal{T}_1 : G \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}) \qquad \text{şi} \qquad \mathcal{T}_2 : G \longrightarrow GL(n,\mathbb{K})$$

sunt numite *echivalente* dacă există $S \in GL(n,\mathbb{K})$ astfel încât

$$\mathcal{T}_2(g) = S^{-1}\,\mathcal{T}_1(g)\,S, \qquad \forall g \in G.$$

7.2.9 Aplicaţia $R : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^2) :\ t \mapsto R(t)$, unde

$$R(t) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad R(t)(x,y) = (x\,\cos t - y\,\sin t,\ x\,\sin t + y\,\cos t),$$

este o reprezentare liniară a grupului aditiv $(\mathbb{R},+)$ în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$. Alegând în $\mathbb{R}^2$ baza $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$, obţinem reprezentarea matriceală

$$\mathcal{R} : \mathbb{R} \longrightarrow GL(2,\mathbb{R}) :\ t \mapsto \mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Avem $\mathcal{R}(t+s) = \mathcal{R}(t)\,\mathcal{R}(s)$.

7.3 Reprezentări ireductibile

7.3.1 Definiţie. Două reprezentări liniare n-dimensionale peste $\mathbb{K}$ ale unui grup G

$$T_1 : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_1) \qquad \text{şi} \qquad T_2 : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_2)$$

sunt numite *echivalente* dacă există un izomorfism liniar $S : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ astfel încât

$$T_1(g) = S^{-1}\, T_2(g)\, S, \qquad \forall g \in G,$$

adică astfel încât diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\quad T_1(g) \quad} & \mathcal{V}_1 \\ \Big\downarrow S & & \Big\downarrow S \\ \mathcal{V}_2 & \xrightarrow{\quad T_2(g) \quad} & \mathcal{V}_2 \end{array}$$

este comutativă.

7.3.2 Definiţie. Fie $T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V})$ o reprezentare liniară a grupului G în $\mathcal{V}$. Spunem că subspaţiul $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este *invariant* faţă de T dacă

$$T(g)(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}, \qquad \forall g \in G.$$

7.3.3 Definiţie. Spunem că reprezentarea liniară

$$T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V})$$

este o *reprezentare ireductibilă* dacă singurele subspaţii invariante sunt $\{0\}$ şi $\mathcal{V}$. În caz contrar, reprezentarea este numită *reductibilă*.

7.3.4 Reprezentarea liniară $T : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^3) :\ t \mapsto T(t)$, unde

$$T(t) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(t)(x, y, z) = (x\, \cos t - y\, \sin t,\ x\, \sin t + y\, \cos t,\ z)$$

este o reprezentare liniară reductibilă a grupului aditiv $(\mathbb{R}, +)$ în $\mathbb{R}^3$. Subspaţiul $\mathcal{W} = \{\, (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} \subset \mathbb{R}^3$ este subspaţiu invariant.

7.3.5 Propoziţie. *Dacă*

$$T_1 : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_1) \qquad şi \qquad T_2 : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_2)$$

sunt două reprezentări $\mathbb{K}$-liniare, atunci aplicaţia

$$T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2), \quad T(g)(x_1, x_2) = (T_1(g)x_1, T_2(g)x_2)$$

este o reprezentare $\mathbb{K}$-liniară a grupului G în spaţiul produs direct $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, numită suma reprezentărilor *T_1 şi T_2, notată cu $T_1 \oplus T_2$.*

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} T(g_1g_2)(x_1, x_2) &= (T_1(g_1g_2)x_1, T_2(g_1g_2)x_2) \\ &= (T_1(g_1)\,T_1(g_2)x_1,\, T_2(g_1)\,T_2(g_2)x_2) \\ &= T(g_1)(T_1(g_2)x_1,\, T_2(g_2)x_2) = T(g_1)T(g_2)(x_1, x_2). \end{aligned}$$

7.3.6 Propoziţie. *Dacă*

$$\mathcal{T} : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : \; g \mapsto \mathcal{T}(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & \cdots & t_{1n}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & \cdots & t_{nn}(g) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R} : G \longrightarrow GL(k, \mathbb{K}) : \; g \mapsto \mathcal{R}(g) = \begin{pmatrix} r_{11}(g) & \cdots & r_{1k}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{k1}(g) & \cdots & r_{kk}(g) \end{pmatrix}$$

sunt două reprezentări matriceale, atunci

$$\mathcal{T} \oplus \mathcal{R} : G \longrightarrow GL(n+k, \mathbb{K})$$

$$(\mathcal{T} \oplus \mathcal{R})(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & \cdots & t_{1n}(g) & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & \cdots & t_{nn}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{11}(g) & \cdots & r_{1k}(g) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{k1}(g) & \cdots & r_{kk}(g) \end{pmatrix}$$

este o reprezentare a lui G, numită suma reprezentărilor *$\mathcal{T}$ şi $\mathcal{R}$.*

7.4 Reprezentări unitare şi ortogonale

7.4.1 Definiţie. O submulţime $H \subseteq G$ este numită *subgrup* al grupului G dacă

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \in H \\ g_2 \in H \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad g_1 g_2^{-1} \in H.$$

7.4.2 Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu Hilbert finit-dimensional. Mulţimea transformărilor unitare

$$U(\mathcal{V}) = \{\ A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \mid \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{V}\ \}$$

este un subgrup al grupului $GL(\mathcal{V})$ al tuturor automorfismelor lui $\mathcal{V}$.

7.4.3 Definiţie. Prin *reprezentare unitară* a grupului G în spaţiul Hilbert $\mathcal{V}$ se înţelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow U(\mathcal{V}).$$

7.4.4 Dacă $T : G \longrightarrow U(\mathcal{V})$ este reprezentare unitară, atunci

$$\langle T(g)x, T(g)y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \forall g \in G.$$

7.4.5 Teoremă. *Mulţimea matricelor unitare de ordinul n*

$$U(n) = \{\ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \ A^*\, A = I\ \}$$

are o structură de grup în raport cu înmulţirea matricelor, iar

$$SU(n) = \{\ A \in U(n) \mid \ \det A = 1\ \}$$

este un subgrup al lui $U(n)$.

Demonstraţie. a) Produsul a două matrice unitare A şi B este o matrice unitară

$$(AB)^*\,(AB) = B^*A^*AB = B^*B = I$$

şi inversa unei matrice unitare A este o matrice unitară

$$A^{-1} = A^* \quad \Longrightarrow \quad (A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}.$$

b) Afirmaţia rezultă din relaţiile

$$\det(AB) = \det A\ \det B, \qquad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

7.4.6 Definiţie. Prin *reprezentare matriceală unitară* a grupului G se înţelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow U(n).$$

7.4.7 Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu Hilbert real. Mulţimea transformărilor ortogonale

$$O(\mathcal{V}) = \{\ A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \mid \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{V}\ \}$$

este un subgrup al grupului $GL(\mathcal{V})$ al tuturor automorfismelor lui $\mathcal{V}$.

7.4.8 Definiţie. Prin *reprezentare ortogonală* a grupului G în spaţiul Hilbert real $\mathcal{V}$ se înţelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow O(\mathcal{V}).$$

7.4.9 Dacă $T : G \longrightarrow O(\mathcal{V})$ este o reprezentare ortogonală, atunci

$$\langle T(g)x, T(g)y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \forall g \in G.$$

7.4.10 Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice cu n linii şi n coloane cu elemente numere reale şi fie ${}^tA$ transpusa ei. Relaţiile

$$A\,{}^tA = I, \qquad {}^tA\,A = I, \qquad A^{-1} = {}^tA,$$

unde $I \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ este matricea unitate, sunt echivalente (v. pag. 32-**1**).

7.4.11 Definiţie. Matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ este numită *matrice ortogonală* dacă

$${}^tA\,A = I$$

(condiţie echivalentă cu $A^{-1} = {}^tA$ şi $A\,{}^tA = I$).

7.4.12 Dacă A este o matrice ortogonală, atunci $\det A \in \{-1, 1\}$.

7.4.13 Teoremă. *Mulţimea matricelor ortogonale de ordinul n*

$$O(n) = \left\{\ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid\ {}^tA\,A = I\ \right\}$$

are o structură de grup în raport cu înmulţirea matricelor, iar

$$SO(n) = \{\ A \in O(n) \mid\ \det A = 1\ \}$$

este un subgrup al lui $U(n)$.

7.4.14 Definiţie. Prin *reprezentare matriceală ortogonală* a grupului G se înţelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow O(n).$$

7.5 Grupul rotaţiilor. Reprezentări liniare

7.5.1 Propoziţie.

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

şi

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SO(2) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 + \gamma^2 = 1 \\ \beta^2 + \delta^2 = 1 \\ \alpha\beta + \gamma\delta = 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{cases}$$

Din relaţiile $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ şi $\beta^2 + \delta^2 = 1$ rezultă că există $t, s \in [0, 2\pi)$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin s \\ \sin t & \cos s \end{pmatrix},$$

dar

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta + \gamma\delta = 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \sin(t+s) = 0 \\ \cos(t+s) = 1. \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} s = -t \\ \text{sau} \\ s = 2\pi - t. \end{cases}$$

7.5.2 Exerciţiu. Dacă $A \in SO(3)$, atunci există $t \in [0, 2\pi)$ şi o matrice $S \in O(3)$ astfel încât

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Matricea A este matricea în raport cu baza canonică a unei transformări ortogonale $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este

$$-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \lambda - \det A = 0$$

Deoarece ${}^tA = A^{-1}$, adică

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

şi $\det A = 1$, rezultă că $\lambda = 1$ este valoare proprie a lui A. Fie e_1 un vector propriu corespunzător cu $||e_1|| = 1$, adică $Ae_1 = e_1$. Subspaţiul vectorilor ortogonali pe e_1

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \ \langle x, e_1 \rangle = 0 \ \}$$

este un subspaţiu invariant

$$x \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad \langle Ax, e_1 \rangle = \langle Ax, Ae_1 \rangle = \langle x, e_1 \rangle = 0.$$

Dacă $\{e_2, e_3\}$ este o bază ortonormată în $\mathcal{V}$, atunci $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$, în raport cu care matricea lui A are forma

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

unde $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ este o matrice ortogonală. Notând cu S matricea de trecere de la baza canonică la baza $\mathcal{B}$, avem relaţia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} S,$$

din care rezultă

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1,$$

ceea ce arată că $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SO(2)$. Conform exerciţiului anterior există $t \in [0, 2\pi)$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

7.5.3 Matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

este matricea unei rotaţii în jurul vectorului e_1 (vectorul propriu corespunzător valorii $\lambda = 1$). Grupul $SO(3)$ este grupul rotaţiilor spaţiului tridimensional.

7.5.4 Aplicaţia $SO(3) \longrightarrow O(\mathbb{R}^3)$ prin care matricei

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in SO(3)$$

i se asociază transformarea ortogonală $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$g(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

este o reprezentare ortogonală a grupului $SO(3)$ în $\mathbb{R}^3$.

7.5.5 Exerciţiu. Aplicaţia

$$T : SO(3) \longrightarrow GL(\mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})) : g \mapsto T(g),$$

unde

$$T(g) : \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \qquad (T(g)f)(x) = f(g^{-1}x),$$

este o reprezentare liniară în spaţiul vectorial complex $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ al tuturor funcţiilor

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned}(T(g_1g_2)f)(x) &= f((g_1g_2)^{-1}x) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}x)\\ &= f(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (T(g_2)f)(g_1^{-1}x)\\ &= (T(g_1)(T(g_2)f))(x) = (T(g_1)T(g_2)f)(x).\end{aligned}$$

7.5.6 Mulţimea de matrice

$$O(1,3) = \left\{ A \in GL(4,\mathbb{R}) \mid A\, I_{1,3}\, {}^tA = I_{1,3} \right\},$$

unde

$$I_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

considerată împreună cu înmulţirea este grup (se numeşte *grupul Lorentz*).

7.5.7 Exerciţiu.

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{C},\;\; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2) \implies \begin{cases} \bar\alpha\,\gamma + \bar\beta\,\delta = 0 \\ -\beta\gamma + \alpha\delta = 1 \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma = -\bar\beta \\ \delta = \bar\alpha \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \end{cases}$$

7.5.8 Grupul $SU(2)$ admite parametrizarea

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)/2}\cos\frac{1}{2}\theta & \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)/2}\sin\frac{1}{2}\theta \\ \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)/2}\sin\frac{1}{2}\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+\psi)/2}\cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ -2\pi \le \psi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

cu proprietatea

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)/2}\cos\frac{1}{2}\theta & \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)/2}\sin\frac{1}{2}\theta \\ \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)/2}\sin\frac{1}{2}\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+\psi)/2}\cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta & \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\theta \\ \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\theta & \cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi/2} \end{pmatrix},$$

parametrii φ, θ, ψ fiind numiţi *unghiurile lui Euler*.

7.5.9 Exerciţiu. Dacă $a, b \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, atunci

$$\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba).$$

Rezolvare. Avem

$$\operatorname{tr}(ab) = \sum_{i=1}^{n}(ab)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(ba)_{jj} = \operatorname{tr}(ba).$$

7.5.10 Folosind baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, putem identifica grupul $SO(3)$ cu grupul de transformări

$$\{\ A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \det A = 1,\ ||Ax|| = ||x||, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3\ \}.$$

7.5.11 Propoziţie. *a) Spaţiul matricelor antihermitiene de ordinul doi cu urmă nulă*

$$\mathcal{W} = \{\ u \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid u^* = -u, \ \ \operatorname{tr} u = 0\ \}$$

este un spaţiu vectorial real de dimensiune 3 *şi*

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{W}, \qquad h(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}x_3 & -x_2 + \mathrm{i}x_1 \\ x_2 + \mathrm{i}x_1 & -\mathrm{i}x_3 \end{pmatrix}$$

este un izomorfism cu proprietatea

$$||x||^2 = \det h(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

b) Aplicaţia

$$\eta : SU(2) \longrightarrow SO(3) :\ g \mapsto \eta(g),$$

unde

$$\eta(g) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \eta(g)x = h^{-1}(g\, h(x)\, g^*)$$

este un morfism de grupuri cu nucleul

$$\operatorname{Ker}\eta = \left\{ g \in SU(2) \,\middle|\, \eta(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demonstraţie. a) Avem

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \mathrm{i}\beta_{11} & \alpha_{12} + \mathrm{i}\beta_{12} \\ \alpha_{21} + \mathrm{i}\beta_{21} & \alpha_{22} + \mathrm{i}\beta_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \implies u = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\beta_{11} & \alpha_{12} + \mathrm{i}\beta_{12} \\ -\alpha_{12} + \mathrm{i}\beta_{12} & -\mathrm{i}\beta_{11} \end{pmatrix}.$$

b) Din definiţia lui η rezultă că

$$\begin{aligned}\eta(g_1\,g_2)x &= h^{-1}((g_1\,g_2)\,h(x)\,(g_1\,g_2)^*) = h^{-1}(g_1\,g_2\,h(x)\,g_2^*\,g_1^*)\\ &= h^{-1}(g_1\,h(h^{-1}(g_2\,h(x)\,g_2^*))g_1^*) = \eta(g_1)(\eta(g_2)x) = (\eta(g_1)\,\eta(g_2))x.\end{aligned}$$

Utilizând baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, obţinem relaţiile

$$\eta\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\eta\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta & \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\theta \\ \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\theta & \cos\frac{1}{2}\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

din care deducem că $\det\eta(g) = 1$. Deoarece

$$(g\,h(x)\,g^*)^* = g\,(h(x))^*\,g^* = -g\,h(x)\,g^*)^* = g$$

$$\mathrm{tr}(g\,h(x)\,g^*) = \mathrm{tr}(g\,g^*\,h(x)) = \mathrm{tr}\,h(x) = 0$$

$$||\eta(g)x||^2 = \det(g\,h(x)\,g^*) = \det h(x) = ||x||^2$$

rezultă că η este un morfism de grupuri bine definit. Elementul $g \in SU(2)$ aparţine nucleului lui η dacă şi numai dacă $\eta(g)x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^3$. Din relaţiile

$$\eta(g)(1,0,0) = (1,0,0), \qquad \eta(g)(0,1,0) = (0,1,0), \qquad \eta(g)(0,0,1) = (0,0,1)$$

rezultă că $g \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \right\}$.

7.5.12 Prin morfismul $\eta : SU(2) \longrightarrow SO(3)$, fiecare element al lui $SO(3)$ corespunde la două elemente din $SU(2)$ care diferă doar prin semn, $\eta(g) = \eta(-g)$. Orice reprezentare liniară

$$T : SU(2) \longrightarrow GL(\mathcal{V})$$

cu $T(g)=T(-g)$ defineşte o reprezentare liniară a grupului $SO(3)$.

7.5.13 Exerciţiu. Aplicaţia $SU(2) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ obţinută asociind fiecarui element

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} \in SU(2)$$

transformarea

$$g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \qquad g(z_1,z_2) = (\alpha z_1 + \beta z_2,\, -\bar\beta z_1 + \bar\alpha z_2)$$

este o reprezentare unitară bidimensională a lui $SU(2)$.

Rezolvare. Avem $(g_1\, g_2)(z_1, z_2) = g_1\,(g_2(z_1, z_2))$.

7.5.14 Exerciţiu. a) Aplicaţia $T : SU(2) \longrightarrow GL(\mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}))$ obţinută asociind fiecarui element $g \in SU(2)$ transformarea

$$T(g) : \mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}), \quad (T(g)f)(z_1, z_2) = f(g^{-1}(z_1, z_2))$$

este o reprezentare liniară a grupului $SU(2)$ in spaţiul vectorial complex al tuturor funcţiilor $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ subspaţiul vectorial al polinoamelor omogene de grad n

$$\mathcal{E}_n = \left\{ f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k\, z_2^{n-k} \;\middle|\; a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

este un subspaţiu invariant al reprezentării de la punctul a).

Rezolvare. Inversul elemntului

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

este

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix},$$

iar în cazul

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z_1^k\, z_2^{n-k}$$

obţinem

$$(T(g)f)(z_1, z_2) = f(g^{-1}(z_1, z_2)) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\bar{\alpha} z_1 - \beta z_2)^k\, (\bar{\beta} z_1 + \alpha z_2)^{n-k}.$$

7.5.15 Se poate arăta că reprezentările lui $SU(2)$ induse în subspaţiile $\mathcal{E}_n$ sunt reprezentări ireductibile, şi că ele sunt până la o echivalenţă toate reprezentările ireductibile ale grupului $SU(2)$. Notând $j = (n-1)/2$, adică $n = 2j+1$, obţinem

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z_1^k\, z_2^{n-k} = \sum_{m=-j}^{j} a_{j+m}\, z_1^{j+m}\, z_2^{j-m}.$$

şi

$$(T(g)f)(z_1, z_2) = \sum_{m=-j}^{j} a_{j+m}(\bar{\alpha}z_1 - \beta z_2)^{j+m} (\bar{\beta}z_1 + \alpha z_2)^{j-m}.$$

Pentru fiecare element $a \in SO(3)$ există exact două elemente g_a şi $-g_a$ în $SU(2)$ astfel încât $a = \eta(g_a) = \eta(-g_a)$. Deoarece

$$(T(-g)f)(z_1, z_2) = (-1)^{2j} (T(g)f)(z_1, z_2),$$

în cazul in care j este intreg, relaţia

$$SO(3) \longrightarrow GL(\mathcal{E}_{2j+1}) : \ a \mapsto T(g_a)$$

este o reprezentare ireductibilă $(2j+1)$-dimensională a grupului $SO(3)$ în spaţiul vectorial $\mathcal{E}_{2j+1}$.

Capitolul 8

Algebre Lie

8.1 Algebre Lie

8.1.1 Definiţie. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$. Prin *algebră asociativă* peste corpul $\mathbb{K}$ se înţelege o mulţime $\mathcal{A}$ considerată împreună cu trei operaţii

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}\times\mathcal{A}:\longrightarrow\mathcal{A}: & (a,b)\mapsto a+b & \text{(adunarea)} \\ \mathbb{K}\times\mathcal{A}:\longrightarrow\mathcal{A}: & (\alpha,a)\mapsto \alpha a & \text{(înmultirea cu scalari)} \\ \mathcal{A}\times\mathcal{A}:\longrightarrow\mathcal{A}: & (a,b)\mapsto ab & \text{(înmultirea internă)} \end{array}$$

astfel încât $\mathcal{A}$ împreună cu primele două operaţii este spaţiu vectorial şi

1) $a(b+c)=ab+ac, \qquad \forall a,b,c\in\mathcal{A};$

2) $(a+b)c=ac+bc, \qquad \forall a,b,c\in\mathcal{A};$

3) $a(bc)=(ab)c, \qquad \forall a,b,c\in\mathcal{A};$

4) $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b), \qquad \forall a,b\in\mathcal{A},\ \forall\alpha\in\mathbb{K}.$

Prin dimensiunea algebrei $\mathcal{A}$ se înţelege dimensiunea spaţiului vectorial $\mathcal{A}$.

8.1.2 Exemple. a) Mulţimea $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ a tuturor matricelor pătrate de ordinul n, considerată împreună cu operaţiile de adunare a matricelor, înmulţire cu scalari şi produsul matricelor, este o algebră asociativă peste $\mathbb{K}$.

b) Dacă $\mathcal{V}$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$, atunci mulţimea $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ a tuturor operatorilor liniari $A:\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}$, considerată împreună cu adunarea operatorilor, înmulţirea cu scalari şi compunerea operatorilor, este o algebră asociativă peste $\mathbb{K}$.

8.1.3 Definiţie. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$. Prin *algebră Lie* peste corpul $\mathbb{K}$ se înţelege o mulţime L considerată împreună cu trei operaţii

$$\begin{array}{ll} L \times L :\longrightarrow L :\ (a,b) \mapsto a+b & \text{(adunarea)},\\ \mathbb{K} \times L :\longrightarrow L :\ (\alpha,a) \mapsto \alpha a & \text{(înmultirea cu scalari)},\\ L \times L :\longrightarrow L :\ (a,b) \mapsto [a,b] & \text{(crosetul)} \end{array}$$

astfel încât L împreună cu primele două operaţii este spaţiu vectorial şi

1) $[\alpha a+\beta b, c] = \alpha[a,c]+\beta[b,c], \qquad \forall a,b,c \in L, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K};$

2) $[a,b]+[b,a]=0, \qquad \forall a,b \in L;$

3) $[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0, \quad \forall a,b,c \in A$ (identitatea Jacobi).

Prin *dimensiunea* algebrei Lie se înţelege dimensiunea spaţiului vectorial L.

8.1.4 O algebră Lie L poate fi privită ca un spaţiu vectorial L pe care s-a definit o lege de compoziţie internă suplimentară

$$L \times L :\longrightarrow L :\ (a,b) \mapsto [a,b]$$

compatibilă cu structura de spaţiu vectorial.

8.1.5 Propoziţie. *a) Plecând de la orice algebră asociativă $\mathcal{A}$, se obţine o structură de algebră Lie pe $\mathcal{A}$ definind croşetul prin*

$$[a,b] = ab - ba.$$

b) Algebra Lie peste $\mathbb{K}$ obţinută plecând de la $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se notează cu $gl(n,\mathbb{K})$.

c) Algebra Lie peste $\mathbb{K}$ obţinută plecând de la $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ se notează cu $gl(\mathcal{V})$.

Demonstraţie. Avem

$[\alpha a+\beta b, c] = (\alpha a+\beta b)c - c(\alpha a+\beta b) = \alpha(ac-ca)+\beta(bc-cb) = \alpha[a,c]+\beta[b,c],$

$[a,b] = ab-ba = -(ba-ab) = -[b,a],$

$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b] = [(ab-ba),c]+[(bc-cb),a]+[(ca-ac),b]$

$= (ab-ba)c-c(ab-ba)+(bc-cb)a-a(bc-cb)+(ca-ac)b-b(ca-ac) = 0.$

8.1.6 Definiţie. Prin *bază* a algebrei Lie L se înţelege o bază $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a spaţiului L, privit ca spaţiu vectorial. Coeficienţii $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$ din relaţiile

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k\, v_k$$

se numesc *constantele de structură* ale algebrei L referitoare la baza aleasă.

8.1.7 Notând

$$e^i_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(singurul element nenul este la intersecţa dintre coloana i şi linia j), orice matrice admite reprezentarea

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a^j_i \, e^i_j = a^j_i \, e^i_j.$$

În cazul $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} = a^1_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a^1_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a^2_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a^2_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= a^1_1 \, e^1_1 + a^1_2 \, e^2_1 + a^2_1 \, e^1_2 + a^2_2 \, e^2_2.$$

8.1.8 Propoziţie. *Algebra Lie $gl(n, \mathbb{K})$, de dimensiune n^2, admite baza*

$$\{ \, e^i_j \mid \; i, j \in \{1, 2, ..., n\} \, \} \qquad cu \qquad [e^i_j, e^k_m] = \delta^i_m \, e^k_j - \delta^k_j \, e^i_m.$$

Demonstraţie. Avem $e^i_j \, e^k_m = \delta^i_m \, e^k_j$.

8.1.9 Definiţie. Prin *subalgebră Lie* a algebrei L se înţelege un subspaţiu vectorial

$$L_1 \subseteq L$$

astfel încât

$$\left. \begin{array}{l} a \in L_1 \\ b \in L_1 \end{array} \right\} \implies [a, b] \in L_1.$$

8.1.10 Fiecare subalgebră Lie a unei algebre L are o structură de algebră Lie.

8.1.11 Exerciţiu. a) Mulţimea matricelor cu urmă nulă

$$sl(n, \mathbb{K}) = \{ \, g \in gl(n, \mathbb{K}) \mid \; \operatorname{tr} g = g^1_1 + g^2_2 + \cdots + g^n_n = 0 \, \}$$

este o subalgebră Lie, de dimensiune n^2-1, a algebrei $gl(n,\mathbb{K})$.

b) Mulţimea matricelor *antihermitiene*

$$u(n) = \{\, g \in gl(n,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{g} = -g \,\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune n^2.

c) Mulţimea matricelor antihermitiene cu urmă nulă

$$su(n) = u(n) \cap sl(n,\mathbb{C}) = \{\, g \in u(n) \mid \operatorname{tr} g = 0 \,\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune n^2-1.

d) Mulţimea matricelor *strâmb simetrice*

$$o(n) = \{\, g \in gl(n,\mathbb{R}) \mid {}^t g = -g \,\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$.

e) Mulţimea de matrice

$$o(1,3) = \left\{ g \in gl(4,\mathbb{R}) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t g \right\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune 6 (numită algebra Lie a grupului Lorentz).

Rezolvare. a) Avem $\operatorname{tr}(a+b) = \operatorname{tr} a + \operatorname{tr} b$, $\operatorname{tr}(\alpha a) = \alpha \operatorname{tr} a$,

$$\operatorname{tr} ab = \sum_{k=1}^{n} (ab)_k^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^k\, b_k^j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^j\, a_j^k = \sum_{j=1}^{n} (ba)_j^j = \operatorname{tr} ba$$

şi prin urmare, $\operatorname{tr}[a,b] = \operatorname{tr}(ab-ba) = 0$, oricare ar fi $a,\, b \in gl(n,\mathbb{K})$. O bază a algebrei Lie $sl(n,\mathbb{K})$ este

$$\{\, e_k^j \mid k \neq j \,\} \cup \{\, e_k^k - e_n^n \mid k \in \{1,2,...,n-1\} \,\}.$$

b) Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $a, b \in u(n)$, atunci

$${}^t\overline{(\alpha a)} = \bar{\alpha}\, {}^t\bar{a} = -(\alpha a),$$

$${}^t\overline{(a+b)} = {}^t\bar{a} + {}^t\bar{b} = -a - b = -(a+b),$$

$${}^t\overline{[a,b]} = {}^t\overline{(ab-ba)} = {}^t\bar{b}\, {}^t\bar{a} - {}^t\bar{a}\, {}^t\bar{b} = ba - ab = -[a,b].$$

O bază a algebrei Lie $u(n)$ este

$$\{\, e_k^j - e_j^k \mid k < j \,\} \cup \{\, \mathrm{i}(e_k^j + e_j^k) \mid k < j \,\} \cup \{\, \mathrm{i}\, e_k^k \mid k \in \{1, 2, ..., n\} \,\}.$$

c) O bază a algebrei Lie $su(n)$ este

$$\{\, e_k^j - e_j^k \mid k < j \,\} \cup \{\, \mathrm{i}(e_k^j + e_j^k) \mid k < j \,\} \cup \{\, \mathrm{i}\,(e_k^k - e_n^n) \mid k \in \{1, 2, ..., n-1\} \,\}.$$

d) O bază a algebrei Lie $o(n)$ este

$$\{\, e_k^j - e_j^k \mid k < j \,\}.$$

e) Se obţine

$$o(1,3) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_2 & -\alpha_4 & 0 & \alpha_6 \\ \alpha_3 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & 0 \end{array} \right) \;\middle|\; \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_6 \in \mathbb{R} \right\}.$$

O bază a algebrei Lie $o(1,3)$ este $\{\, e_1^2 + e_2^1,\ e_1^3 + e_3^1,\ e_1^4 + e_4^1,\ e_1^3 - e_3^1,\ e_4^2 - e_2^4,\ e_4^3 - e_3^4 \,\}$.

8.1.12 Definiţie. Fie $G \subseteq GL(n, \mathbb{K})$ un subgrup. Prin *subgrup cu un parametru* al grupului G se înţelege un morfism de grupuri

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow G,$$

adică o aplicaţie astfel încât

$$g(t + s) = g(t)\, g(s), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

8.1.13 Exerciţiu. Oricare ar fi matricea $a \in gl(n, \mathbb{K})$, aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta},$$

este un subgrup cu un parametru al lui $GL(n, \mathbb{K})$ astfel încât

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$$

(a poate fi privit ca fiind "generatorul infinitezimal" al subgrupului considerat).

Rezolvare. Ţinând seama de definiţia exponenţialei unei matrice obtinem

$$g(t + s) = \mathrm{e}^{(t+s)a} = \mathrm{e}^{ta}\, \mathrm{e}^{sa} = g(t)\, g(s), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{ta} = a\mathrm{e}^{ta}.$$

8.1.14 Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este diagonalizabilă, atunci există o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ şi λ_1, λ_2, ... , λ_n astfel încât

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} S,$$

relaţie din care rezultă $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ şi egalitatea

$$\mathrm{e}^A = S^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} S,$$

care conduce la

$$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}.$$

Se poate arăta că relaţia $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$ are loc pentru orice matrice A.

8.1.15 Exerciţiu. a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K})$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) \in sl(n, \mathbb{K})$.

b) Dacă $a \in sl(n, \mathbb{K})$, atunci $\mathrm{e}^{ta} \in SL(n, \mathbb{K})$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K}), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $SL(n, \mathbb{K})$ astfel încât $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$.

Rezolvare (cazul n=2). Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K}), \qquad g(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix},$$

este un subgrup cu un parametru, atunci

$$\begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{vmatrix} = 1, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivând această relaţie obţinem egalitatea

$$\begin{vmatrix} g'_{11}(t) & g'_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g'_{21}(t) & g'_{22}(t) \end{vmatrix} = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

care în cazul $t = 0$ devine

$$\begin{vmatrix} g'_{11}(0) & g'_{12}(0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g'_{21}(0) & g'_{22}(0) \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$\operatorname{tr} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = g'_{11}(0) + g'_{22}(0) = 0.$$

Exerciţiu. a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) \in u(n)$.

b) Dacă $a \in u(n)$, atunci $\mathrm{e}^{ta} \in U(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta},$$

este un subgrup cu un parametru al lui $U(n)$ astfel încât $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$.

Rezolvare. Dacă $g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n)$ este un subgrup cu un parametru, atunci

$$g(t)\, {}^t\overline{g}(t) = I \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivând această relaţie obţinem egalitatea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)\, {}^t\overline{g}(t) + g(t)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} {}^t\overline{g}(t) = 0$$

care în cazul $t = 0$ devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} {}^t\overline{g}(0) = 0.$$

8.1.16 Exerciţiu. a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SU(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) \in su(n)$.

b) Dacă $a \in su(n)$, atunci $\mathrm{e}^{ta} \in SU(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SU(n), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta},$$

este un subgrup cu un parametru al lui $SU(n)$ astfel încât $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$.

8.1.17 Exerciţiu. a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow O(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) \in o(n)$.

b) Dacă $a \in o(n)$, atunci $\mathrm{e}^{ta} \in O(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow O(n), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $O(n)$ astfel încât $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$.

8.2 Reprezentări liniare

8.2.1 Definiţie. Fie L o algebră Lie peste $\mathbb{K}$ şi L' o algebră Lie peste $\mathbb{K}'$, unde corpurile $\mathbb{K}$ şi $\mathbb{K}'$ aparţinând lui $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sunt astfel încât $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$. Prin *morfism de algebre Lie* de la L la L' se înţelege o aplicaţie liniară $A : L \longrightarrow L'$ cu proprietatea

$$A([a, b]) = [Aa, Ab], \qquad \forall a, b \in L.$$

8.2.2 Definiţie. Spunem ca algebrele Lie L şi L' peste acelaşi corp $\mathbb{K}$ sunt *izomorfe* dacă există un morfism bijectiv de algebre Lie (numit izomorfism)

$$A : L \longrightarrow L'.$$

8.2.3 Propoziţie. *Dacă algebrele Lie L şi L' peste acelaşi corp $\mathbb{K}$ şi de aceeaşi dimensiune au în raport cu două baze $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi respectiv $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ aceleaşi constante de structură*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \, e_k, \qquad [e'_i, e'_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \, e'_k,$$

atunci ele sunt izomorfe.

Demonstraţie. Aplicaţia $A : L \longrightarrow L'$, $Ae_j = e'_j$, adică

$$A(\sum_{i=1}^{n} a_i \, e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, e'_i$$

este un izomorfism de algebre Lie. Ea este, evident, liniară, bijectivă şi

$$\begin{aligned} A[a, b] &= A\left[\textstyle\sum_{i=1}^n a_i \, e_i, \ \sum_{j=1}^n b_j \, e_j\right] = \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \, A[e_i, e_j] \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \, \sum_{k=1}^n c_{ij}^k Ae_k = \sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \, \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e'_k \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \, [e'_i, e'_j] = \sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \, [Ae_i, Ae_j] = [Aa, Ab]. \end{aligned}$$

8.2.4 Propoziţie. *Algebrele Lie reale* $o(3)$ *şi* $su(2)$ *sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Algebra Lie $o(3)$ admite baza

$$\{\, o_1 = e_3^2 - e_2^3,\ o_2 = e_1^3 - e_3^1,\ o_3 = e_2^1 - e_1^2 \,\}$$

cu

$$[o_1, o_2] = o_3, \qquad [o_2, o_3] = o_1, \qquad [o_3, o_1] = o_2,$$

iar algebra Lie $su(2)$ baza

$$\left\{ u_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e_1^1 - e_2^2),\ u_2 = -\frac{1}{2}(e_2^1 - e_1^2),\ u_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e_2^1 + e_1^2) \right\}$$

cu

$$[u_1, u_2] = u_3, \qquad [u_2, u_3] = u_1, \qquad [u_3, u_1] = u_2.$$

8.2.5 Definiţie. Prin *reprezentare liniară* a algebrei Lie L în spaţiul vectorial complex $\mathcal{V}$ (numită şi *reprezentare* $\mathbb{C}$*-liniară*) se înţelege un morfism de algebre

$$\varrho : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}),$$

adică o aplicaţie liniară cu proprietatea

$$\varrho([a, b]) = \varrho(a)\,\varrho(b) - \varrho(b)\,\varrho(a), \qquad \forall a, b \in L.$$

8.2.6 Exerciţiu. Dacă L este o algebră Lie complexă, atunci aplicaţia

$$\varrho : L \longrightarrow gl(L) : a \mapsto \varrho(a),$$

unde

$$\varrho(a) : L \longrightarrow L, \qquad \varrho(a)x = [a, x],$$

este o reprezentare liniară a algebrei L în spaţiul L, numită *reprezentarea adjunctă*.

Rezolvare. Aplicaţia ϱ este bine definită

$$\varrho(a)(\alpha x + \beta y) = [a, \alpha x + \beta y] = \alpha[a, x] + \beta[a, y] = \alpha\,\varrho(a)x + \beta\,\varrho(a)y$$

liniară

$$\varrho(\alpha a + \beta b)x = [\alpha a + \beta b, x] = \alpha[a, x] + \beta[b, x] = (\alpha\,\varrho(a) + \beta\,\varrho(b))x$$

şi din identitatea Jacobi rezultă

$$\begin{aligned}\varrho([a,b])x &= [[a,b],x] = -[[b,x],a] - [[x,a],b] = [a,[b,x]] - [b,[a,x]]\\ &= \varrho(a)(\varrho(b)x) - \varrho(b)(\varrho(a)x) = (\varrho(a)\varrho(b) - \varrho(b)\varrho(a))x = [\varrho(a),\varrho(b)]x.\end{aligned}$$

8.3 Reprezentări ireductibile

8.3.1 Definiţie. Fie $\varrho : L \longrightarrow gl(\mathcal{V})$ o reprezentare liniară a algebrei Lie L în $\mathcal{V}$. Spunem că subspaţiul vectorial $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este *invariant* faţă de ϱ dacă

$$\varrho(a)(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}, \qquad \forall a \in L,$$

adică dacă

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{W} \\ a \in L \end{array}\right\} \implies \varrho(a)x \in \mathcal{W}.$$

8.3.2 Definiţie. Spunem că reprezentarea liniară $\varrho : L \longrightarrow gl(\mathcal{V})$ este o *reprezentare ireductibilă* dacă singurele subspaţii invariante sunt $\{0\}$ şi $\mathcal{V}$. În caz contrar, reprezentarea este numită *reductibilă*.

8.3.3 Propoziţie. *Fie L_1, L_2 două algebre Lie izomorfe, $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ un izomorfism de algebre Lie. Dacă*

$$\varrho_2 : L_2 \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este o reprezentare liniară a algebrei L_2, atunci

$$\varrho_1 : L_1 \longrightarrow gl(\mathcal{V}), \qquad \varrho_1(a) = \varrho_2(\varphi(a)),$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L_1 în $\mathcal{V}$. Reprezentarea ϱ_1 este ireductibilă dacă şi numai dacă ϱ_2 este ireductibilă.

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}\varrho_1(\alpha a + \beta b) &= \varrho_2(\varphi(\alpha a + \beta b)) = \varrho_2(\alpha\,\varphi(a) + \beta\,\varphi(b))\\ &= \alpha\varrho_2(\varphi(a)) - \beta\varrho_2(\varphi(b)) = \alpha\varrho_1(a) - \beta\varrho_1(b),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varrho_1([a,b]) &= \varrho_2(\varphi([a,b])) = \varrho_2([\varphi(a),\,\varphi(b)]))\\ &= [\varrho_2(\varphi(a)),\,\varrho_2(\varphi(b))] = [\varrho_1(a),\,\varrho_1(b)].\end{aligned}$$

Dacă $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ este un subspaţiu vectorial, atunci avem

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho_2(a)x \in \mathcal{W}, \qquad \forall a \in L_2,$$

dacă şi numai dacă

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho_1(a)x = \varrho_2(\varphi(a)) \in \mathcal{W}, \qquad \forall a \in L_1.$$

8.3.4 Cunoaşterea reprezentărilor ireductibile ale algebrei Lie $o(3)$ este echivalentă cu cunoaşterea reprezentărilor ireductibile ale algebrei Lie $su(2)$.

8.3.5 Exerciţiu. Dacă $S : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ este un izomorfism de spaţii vectoriale şi

$$\varrho_2 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_2)$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L în spaţiul vectorial $\mathcal{V}_2$, atunci

$$\varrho_1 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_1), \qquad \varrho_1(a) = S^{-1}\,\varrho_2(a)\,S,$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L în spaţiul vectorial $\mathcal{V}_1$.
Reprezentarea ϱ_1 este ireductibilă dacă şi numai dacă ϱ_2 este ireductibilă.

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned}
\varrho_1(\alpha a + \beta b) &= S^{-1}\,\varrho_2(\alpha a + \beta b)\,S \\
&= \alpha\,S^{-1}\,\varrho_2(a)\,S + \beta\,S^{-1}\,\varrho_2(b)\,S = \alpha\,\varrho_1(a) + \beta\,\varrho_1(b), \\
\varrho_1\left([a,b]\right) &= S^{-1}\,\varrho_2([a,b])\,S = S^{-1}\left(\varrho_1(a)\,\varrho_1(b) - \varrho_1(b)\,\varrho_1(a)\right)S^{-1} \\
&= S\,\varrho_2(a)\,S\,S^{-1}\,\varrho_2(b)\,S - S^{-1}\,\varrho_2(b)\,S\,S^{-1}\varrho_2(a))\,S \\
&= \varrho_1(a)\,\varrho_1(b) - \varrho_1(b)\,\varrho_1(a) = [\varrho_1(a),\,\varrho_1(b)].
\end{aligned}$$

Subspaţiul $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}_1$ este invariant dacă şi numai dacă $S(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}_2$ este invariant. Dacă subspaţiul $S(\mathcal{W})$ este invariant, adică

$$y \in S(\mathcal{W}) \implies \varrho_2(a)y \in S(\mathcal{W}), \qquad \forall a \in L,$$

atunci

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho_1(a)x = S^{-1}\,\varrho_2(a)\,Sx \in \mathcal{W}, \qquad \forall a \in L.$$

Deoarece $\varrho_2(a) = S\varrho_1(a)S^{-1}$, din

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho_1(a)x \in \mathcal{W}, \qquad \forall a \in L,$$

rezultă

$$Sx \in S(\mathcal{W}) \implies \varrho_2(a)Sx = S\varrho_1(a)x \in S(\mathcal{W}), \qquad \forall a \in L.$$

8.3.6 Definiţie. Spunem că reprezentările liniare

$$\varrho_1 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_1) \qquad \text{şi} \qquad \varrho_2 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_2)$$

sunt *echivalente* dacă există un izomorfism liniar $S : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ astfel încât

$$\varrho_1(a) = S^{-1}\,\varrho_2(a)\,S, \tag{8.1}$$

adică dacă diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\varrho_1(a)} & \mathcal{V}_1 \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ \mathcal{V}_2 & \xrightarrow{\varrho_2(a)} & \mathcal{V}_2 \end{array}$$

este comutativă, oricare ar fi $a \in L$.

8.4 Reprezentările algebrelor $sl(2,\mathbb{C})$, $su(2)$ şi $o(3)$

8.4.1 Exerciţiu. Să se arate că matricele

$$a_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formează o bază a algebrei Lie complexe $sl(2,\mathbb{C})$ şi

$$[a_3, a_\pm] = \pm a_\pm, \qquad [a_+, a_-] = 2\,a_3.$$

Dacă

$$\varrho : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este o reprezentare a algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$ în spaţiul $\mathcal{V}$, atunci

$$A_3 = \varrho(a_3), \qquad A_+ = \varrho(a_+), \qquad A_- = \varrho(a_-)$$

verifică relaţiile

$$[A_3, A_\pm] = \pm A_\pm, \qquad [A_+, A_-] = 2\,A_3.$$

Rezolvare. Matricea

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

apartine algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$. Dar, în acest caz,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{11} \end{pmatrix} = 2\alpha_{11}\,a_3 + \alpha_{12}\,a_+ + \alpha_{21}\,a_- \ .$$

Deoarece ϱ este morfism de algebre Lie obţinem

$$[A_3, A_\pm] = [\varrho(a_3), \varrho(a_\pm)] = \varrho([a_3, a_\pm]) = \varrho(\pm a_\pm) = \pm\varrho(a_\pm) = \pm A_\pm,$$

$$[A_+, A_-] = [\varrho(a_+), \varrho(a_-)] = \varrho([a_+, a_-]) = \varrho(2\,a_3) = 2\varrho(a_3) = 2\,A_3.$$

8.4.2 Propoziţie. *Dacă*

$$\varrho : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este reprezentare ireductibilă de dimensiune $n{=}2j{+}1$*, atunci există* $v{\neq}0$ *astfel încât*

$$A_3 v = jv \qquad şi \qquad A_+ v = 0,$$

unde $A_3 = \varrho(a_3),\ \ A_+ = \varrho(a_+)$.

Demonstraţie. Operatorul liniar $A_3 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ admite cel puţin o valoare proprie $\lambda \in \mathbb{C}$. Fie $x_0 \in \mathcal{V}$ un vector propriu corespunzător, adică $A_3 x_0 = \lambda x_0$. Deoarece

$$A_3(A_+ x_0) = (A_3 A_+)x_0 = (A_+ A_3 + A_+)x_0 = A_+ A_3 x_0 + A_+ x_0 = (\lambda + 1)A_+ x_0,$$

rezultă că vectorul $x_1 = A_+ x_0$ verifică relaţia

$$A_3 x_1 = (\lambda + 1)x_1.$$

Similar, din

$$A_3(A_+ x_1) = (A_3 A_+)x_1 = (A_+ A_3 + A_+)x_1 = A_+ A_3 x_1 + A_+ x_1 = (\lambda + 2)A_+ x_1$$

rezultă că vectorul $x_2 = A_+ x_1 = (A_+)^2 x_0$ verifică relaţia

$$A_3 x_2 = (\lambda + 2)x_2.$$

Se poate astfel arăta că toţi vectorii din şirul

$$x_0, \quad x_1 = A_+x_0, \quad x_2 = (A_+)^2x_0, \quad x_3 = (A_+)^3x_0, \quad ...$$

verifică relaţia

$$A_3x_k = (\lambda + k)x_k.$$

Vectorii nenuli din acest şir sunt vectori proprii ai lui A_3, şi deoarece corespund la valori proprii distincte, ei sunt liniar independenţi. Spaţiul $\mathcal{V}$ fiind finit dimensional, rezultă ca şirul x_0, x_1, x_2, ... poate conţine doar un număr finit de vectori nenuli, adică există $x_l \neq 0$ cu $x_{l+1} = A_+x_l = 0$. Alegând $v = x_l$, avem $A_+v = 0$. Fie şirul de vectori

$$w_0 = v, \quad w_1 = A_-w_0, \quad w_2 = (A_-)^2w_0, \quad ...$$

Avem

$$\begin{aligned}
&A_3w_0 = (\lambda + l)w_0,\\
&A_3w_1 = A_3(A_-w_0) = (A_3A_-)w_0 = (A_-A_3 - A_-)w_0 = (\lambda + l - 1)w_1,\\
&A_3w_2 = A_3(A_-w_1) = (A_3A_-)w_1 = (A_-A_3 - A_-)w_1 = (\lambda + l - 2)w_2
\end{aligned}$$

şi, în general,

$$A_3w_k = (\lambda + l - k)w_k.$$

La fel ca mai sus se arată că şirul w_0, w_1, w_2, ... conţine un număr finit de termeni nenuli, că există $w_m \neq 0$ cu $w_{m+1} = A_-w_m = 0$. Deoarece

$$\begin{aligned}
A_+w_1 &= A_+(A_-w_0) = (A_+A_-)w_0 = ([A_+, A_-] + A_-A_+)w_0\\
&= 2\,A_3w_0 = (2\lambda + 2l)w_0,\\
A_+w_2 &= A_+(A_-w_1) = (A_+A_-)w_1 = ([A_+, A_-] + A_-A_+)w_1\\
&= (2\,A_3 + A_-A_+)w_1 = 2(\lambda + l - 1)w_1 + (2\lambda + 2l)A_-w_0\\
&= 2(2\lambda + 2l - 1)w_1,\\
A_+w_3 &= A_+(A_-w_2) = (A_+A_-)w_2 = ([A_+, A_-] + A_-A_+)w_2\\
&= (2\,A_3 + A_-A_+)w_2 = 2(\lambda + l - 2)w_2 + 2(2\lambda + 2l - 1)A_-w_1\\
&= 3(2\lambda + 2l - 2)w_2,
\end{aligned}$$

şi, în general,

$$A_+ w_k = k(2\lambda + 2l - k) w_{k-1},$$

subspaţiul

$$\mathcal{W} = \langle w_0,\, w_1,\, \ldots,\, w_m \rangle,$$

generat de vectorii liniar independenţi $w_0,\, w_1,\, \ldots,\, w_m$, este invariant faţă de acţiunea operatorilor A_3, A_+ şi A_-. Reprezentarea ϱ fiind ireductibilă, trebuie ca $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ şi deci $n = m + 1$. Matricea operatorului A_3 în raport cu baza $\{w_0,\, w_1,\, \ldots,\, w_m\}$ este matricea diagonală

$$\begin{pmatrix} \lambda + l & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + l - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda + l - m + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda + l - m \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, din relaţia $[A_+, A_-] = 2\, A_3$, rezultă că

$$\mathrm{tr} A_3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}([A_+, A_-]) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{tr}(A_+, A_-) - \mathrm{tr}(A_- A_+)) = 0.$$

Deducem că $(\lambda + l) + (\lambda + l - 1) + \cdots (\lambda + l - m) = 0$, adică

$$(m + 1)(\lambda + l) - \frac{m(m+1)}{2} = 0.$$

Deoarece $n = m + 1$, rezultă că

$$\lambda + l = \frac{m}{2} = \frac{n-1}{2},$$

şi notând $j = (n-1)/2$, obţinem $A_3 v = j\, v$.

8.4.3 Propoziţie. *Dacă*

$$\varrho : sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este reprezentare ireductibilă de dimensiune $n = 2j+1$ *şi* $v \neq 0$ *este astfel încât*

$$A_3 v = j\, v, \qquad A_+ v = 0,$$

atunci sistemul de vectori

$$\{\, v_{-j},\, v_{-j+1},\, \ldots,\, v_j \,\},$$

definit prin relaţiile

$$v_j = v, \qquad A_- v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k-1)}\; v_{k-1},$$

este o bază a lui $\mathcal{V}$ *astfel încât*

$$A_3 v_k = k\, v_k, \qquad A_+ v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k+1)}\; v_{k+1}.$$

Demonstraţie. Deoarece

$$j(j+1) - k(k-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -j \;\text{ sau }\; k = j+1,$$

rezultă că există constantele nenule c_1, c_2, ... , c_{2j} astfel încât

$$v_j = w_0, \quad v_{j-1} = c_1\, w_1, \quad v_{j-2} = c_2\, w_2, \quad \ldots \quad v_{-j} = c_{2j} w_{2j},$$

unde $\{w_0, w_1, ..., w_{2j}\}$ este baza lui $\mathcal{V}$ obtinută în demonstraţia propoziţiei precedente. Deoarece $A_3 w_k = (j-k) w_k$, rezultă că $A_3 v_k = k\, v_k$. Din relaţia

$$A_- v_j = \sqrt{j(j+1) - j(j-1)}\, v_{j-1} = \sqrt{2j}\, v_{j-1}$$

rezultă

$$\begin{aligned} A_+ v_{j-1} &= \tfrac{1}{\sqrt{2j}}\, A_+ A_- v_j = \tfrac{1}{\sqrt{2j}} (A_- A_+ + 2A_3) v_j \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2j}}\, 2j\, v_j = \sqrt{2j}\, v_j = \sqrt{j(j+1) - (j-1)j}\, v_j. \end{aligned}$$

Presupunând că $A_+ v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k+1)}\; v_{k+1}$, obţinem

$$\begin{aligned} A_+ v_{k-1} &= \tfrac{1}{\sqrt{j(j+1) - k(k-1)}}\, A_+ A_- v_k = \tfrac{1}{\sqrt{j(j+1) - k(k-1)}}\, (A_- A_+ + 2A_3) v_k \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{j(j+1) - k(k-1)}}\, \left(\sqrt{j(j+1) - k(k+1)} A_- v_{k+1} + 2A_3 v_k \right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{j(j+1) - k(k-1)}}\, \left((j(j+1) - k(k+1)) + 2k \right) v_k \\ &= \sqrt{j(j+1) - (k-1)k}\; v_k. \end{aligned}$$

8.4.4 Teoremă. *a) Oricare ar fi* $n \in \{0, 1, 2, ...\}$*, oricare ar fi spaţiul vectorial complex* $\mathcal{V}$ *de dimensiune* $n = 2j+1$ *şi oricare ar fi baza* $\{v_{-j}, v_{-j+1}, \ldots, v_j\}$ *a lui* $\mathcal{V}$ *aplicaţia*

$$\varrho : sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

definită prin relaţiile

$$A_3\, v_k = k\, v_k, \qquad A_\pm\, v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k \pm 1)}\; v_{k \pm 1}, \qquad (8.2)$$

unde $A_3 = \varrho(a_3)$ şi $A_\pm = \varrho(a_\pm)$, este o reprezentare ireductibilă a algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$.

b) Reprezentările (8.2) cu aceeaşi dimensiune sunt echivalente.

c) Reprezentările (8.2) sunt, până la o echivalenţă, toate reprezentările ireductibile finit dimensionale ale algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$.

Demonstraţie. a) Avem

$$\begin{aligned}
[A_3, A_\pm]\, v_k &= (A_3 A_\pm - A_\pm A_3) v_k \\
&= (k \pm 1)\sqrt{j(j+1) - k(k\pm 1)}\, v_{k\pm 1} - k\sqrt{j(j+1) - k(k\pm 1)}\, v_{k\pm 1} \\
&= \pm\sqrt{j(j+1) - k(k\pm 1)}\, v_{k\pm 1} = \pm A_\pm v_k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[A_+, A_-]\, v_k &= (A_+ A_- - A_- A_+) v_k \\
&= \sqrt{j(j+1) - k(k-1)}\, A_+ v_{k-1} - \sqrt{j(j+1) - k(k+1)}\, A_- v_{k+1} \\
&= (j(j+1) - k(k-1)) v_k - (j(j+1) - k(k+1)) v_k = 2k\, v_k = 2A_3 v_k,
\end{aligned}$$

ceea ce arată că relaţiile (8.2) definesc o reprezentare a algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$. Fie $\mathcal{W} \neq \{0\}$ un subspaţiu invariant şi fie

$$x = x_{-j}\, v_{-j} + x_{-j+1}\, v_{-j+1} + \ \cdots\ + x_j\, v_j \in \mathcal{W}$$

un vector nenul fixat. Cel puţin unul dintre coeficienţii lui x este nenul. Fie

$$k = \min\{\ l \mid x_l \neq 0\ \}.$$

Din (8.2) rezultă că

$$(A_+)^{j-l} x = c\, v_j,$$

unde c este o constantă nenulă. Deoarece $\mathcal{W}$ este invariant, din relaţia precedentă rezultă că $v_j \in \mathcal{W}$ şi apoi că vectorii

$$A_- v_j, \quad (A_-)^2 v_j, \quad (A_-)^3 v_j, \quad \ldots, \quad (A_-)^{2j} v_j,$$

care coincid până la înmulţirea cu anumite constante nenule cu vectorii

$$v_{j-1}, \quad v_{j-2}, \quad \ldots, \quad v_{-j},$$

aparţin lui $\mathcal{W}$. Rezultă astfel că orice subspaţiu invariant nenul $\mathcal{W}$ coincide cu $\mathcal{V}$.
b) Dacă

$$\varrho : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V}), \qquad \varrho' : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V}')$$

sunt două reprezentări liniare de dimensiune $n = 2j + 1$ şi

$$\{v_{-j},\, v_{-j+1},\, \dots,\, v_j\}, \qquad \{v'_{-j},\, v'_{-j+1},\, \dots,\, v'_j\}$$

bazele corespunzătoare, atunci

$$S : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}', \qquad Sv_k = v'_k$$

este un izomorfism liniar şi

$$\varrho(a) = S^{-1}\varrho'(a)\, S, \qquad \forall a \in sl(2, \mathbb{C}).$$

c) Afirmaţia rezultă din rezultatele prezentate la pag. 269-**2** şi pag. 271-**3**.

8.4.5 Propoziţie. *Dacă*

$$\varrho_1 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_1), \qquad \varrho_2 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_2)$$

sunt reprezentări liniare ale algebrei Lie L, atunci aplicaţia

$$\varrho_1 \oplus \varrho_2 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2)$$

definită prin relaţia

$$(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a)(x_1, x_2) = (\varrho_1(a)x_1,\, \varrho_2(a)x_2)$$

este o reprezentare liniară în spaţiul

$$\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 = \{\ (x_1, x_2) \mid\ x_1 \in \mathcal{V}_1,\ x_2 \in \mathcal{V}_2\ \}$$

(numită suma directă *a reprezentărilor ϱ_1 şi ϱ_2).*

Demonstraţie. Aplicaţia $\varrho_1 \oplus \varrho_2$ este liniară

$$(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(\alpha a + \beta b) = \alpha(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a) + \beta(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b)$$

şi

$$\begin{aligned}
(\varrho_1 \oplus \varrho_2)([a,b])(x_1, x_2) &= (\varrho_1([a,b])x_1,\, \varrho_2([a,b])x_2) \\
&= ([\varrho_1(a), \varrho_1(b)]x_1,\, [\varrho_2(a), \varrho_2(b)]x_2) \\
&= (\varrho_1(a)\varrho_1(b)x_1 - \varrho_1(b)\varrho_1(a)x_1,\, \varrho_2(a)\varrho_2(b)x_2 - \varrho_2(b)\varrho_2(a)x_2) \\
&= (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a)\ (\varrho_1(b)x_1,\, \varrho_2(b)x_2) - (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b)\ (\varrho_1(a)x_1,\, \varrho_2(a)x_2) \\
&= [(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a), (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b)](x_1, x_2).
\end{aligned}$$

8.4.6 În teorema de la pag. 272-**4** am descris reprezentările ireductibile ale algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$. Se poate arăta că orice reprezentare liniară finit dimensională a algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$ este o sumă directă de astfel de reprezentări.

8.4.7 Propoziţie. *Fie L o algebră Lie reală. Definind pe complexificatul spaţiului vectorial L*

$$^{\mathbb{C}}L = \{\ a + \mathrm{i}\, a' \mid a,\, a' \in L\ \}$$

croşetul

$$[a + \mathrm{i}\, a', b + \mathrm{i}\, b'] = [a,b] - [a',b'] + \mathrm{i}\,([a,b'] + [a',b])$$

obţinem o algebră Lie complexă, numită complexificata algebrei Lie *reale L.*

Demonstraţie. Prin calcul direct se arată că

$$\begin{aligned}
[(\alpha + \mathrm{i}\alpha')(a + \mathrm{i}a') \quad & +(\beta + \mathrm{i}\beta')(b + \mathrm{i}b'),\, c + \mathrm{i}c'] \\
& = (\alpha + \mathrm{i}\alpha')[a + \mathrm{i}a',\, c + \mathrm{i}c'] + (\beta + \mathrm{i}\beta')[b + \mathrm{i}b',\, c + \mathrm{i}c'], \\
[a + \mathrm{i}a',\, b + \mathrm{i}b'] \quad & = -[b + \mathrm{i}b',\, a + \mathrm{i}a'], \\
[[a + \mathrm{i}a',\, b + \mathrm{i}b'],\, c + \mathrm{i}c'] \quad & +[[b + \mathrm{i}b',\, c + \mathrm{i}c'],\, a + \mathrm{i}a'] \\
& +[[c + \mathrm{i}c',\, a + \mathrm{i}a'],\, b + \mathrm{i}b'] = 0.
\end{aligned}$$

8.4.8 Propoziţie. *a) Dacă L este o algebră Lie reală şi dacă*

$$\varrho : L \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este o reprezentare liniară (în spaţiul vectorial complex $\mathcal{V}$), atunci

$$\tilde{\varrho} : {}^{\mathbb{C}}L \longrightarrow gl(\mathcal{V}), \qquad \tilde{\varrho}(a + \mathrm{i}a')x = \varrho(a)x + \mathrm{i}\,\varrho(a')x$$

este o reprezentare liniară.

b) Reprezentarea $\tilde{\varrho}$ este ireductibilă dacă şi numai dacă ϱ este ireductibilă.

Demonstraţie. a) Se arată prin calcul direct că $\tilde{\varrho}$ este aplicaţie $\mathbb{C}$-liniară

$$\tilde{\varrho}(\,(a + \mathrm{i}a') + (b + \mathrm{i}b')\,) = \tilde{\varrho}(a + \mathrm{i}a') + \tilde{\varrho}(b + \mathrm{i}b'),$$

$$\tilde{\varrho}(\,(\alpha + \mathrm{i}\beta)(a + \mathrm{i}a')\,) = (\alpha + \mathrm{i}\beta)\,\tilde{\varrho}(a + \mathrm{i}a')$$

şi că

$$\tilde{\varrho}(\,[a+\mathrm{i}a',\,b+\mathrm{i}b']) = [\tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a'),\,\tilde{\varrho}(b+\mathrm{i}b')].$$

b) Dacă $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ este astfel încât

$$x \in \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \varrho(a)x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a \in L$, atunci

$$x \in \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a')x = \varrho(a)x + \mathrm{i}\,\varrho(a')x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a+\mathrm{i}a' \in {}^{\mathbb{C}}L$. Invers, dacă

$$x \in \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a')x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a+\mathrm{i}a' \in {}^{\mathbb{C}}L$, atunci

$$x \in \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \varrho(a)x = \tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}0)x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a \in L$.

8.4.9 L poate fi identificată cu o submulţime a lui ${}^{\mathbb{C}}L$ folosind aplicaţia

$$L \longrightarrow {}^{\mathbb{C}}L:\ a \mapsto a+\mathrm{i}\,0.$$

Mai mult,

$$[a,\,b] = [a+\mathrm{i}0,\,b+\mathrm{i}0], \qquad \forall a,b \in L.$$

Dacă $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ este o bază a algebrei Lie reale L,

$$L = \{\ \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2 + \cdots + \alpha_n\, b_n \mid \alpha_j \in \mathbb{R}\ \},$$

atunci $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ este în acelaşi timp bază a algebrei Lie complexe ${}^{\mathbb{C}}L$,

$${}^{\mathbb{C}}L = \{\ \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2 + \cdots + \alpha_n\, b_n \mid \alpha_j \in \mathbb{C}\ \}.$$

8.4.10 Propoziţie. *a) Dacă*

$$\varrho : {}^{\mathbb{C}}L \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este o reprezentare liniară a complexificatei algebrei Lie reale L, atunci

$$\varrho|_L :\ L \longrightarrow gl(\mathcal{V}), \qquad \varrho|_L(a)x = \varrho(a+\mathrm{i}0)x,$$

este o reprezentare liniară a lui L.

b) Reprezentarea $\varrho|_L$ este ireductibilă dacă şi numai dacă ϱ este ireductibilă.

Demonstraţie. a) Aplicaţia $\varrho|_L$ este $\mathbb{R}$-liniară

$$\varrho|_L(a+b) = \varrho(a+b+\mathrm{i}0) = \varrho(a+\mathrm{i}0) + \varrho(b+\mathrm{i}0) = \varrho|_L(a) + \varrho|_L(b),$$

$$\varrho|_L(\alpha a) = \varrho(\alpha a + \mathrm{i}0) = \alpha\varrho(a+\mathrm{i}0) = \alpha\varrho|_L(a)$$

şi

$$\begin{aligned}\varrho|_L([a,b]) &= \varrho([a,b]+\mathrm{i}0) = \varrho([a+\mathrm{i}0,\, b+\mathrm{i}0]) \\ &= [\varrho(a+\mathrm{i}0),\, \varrho(b+\mathrm{i}0)] = [\varrho|_L(a), \varrho|_L(b)].\end{aligned}$$

b) Dacă $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ este astfel încât

$$x \in \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \varrho(a+\mathrm{i}a')x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a + \mathrm{i}a' \in {}^{\mathbb{C}}L$, atunci

$$x \in \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \varrho|_L(a)x = \varrho(\alpha a + \mathrm{i}0)x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a \in L$. Invers, dacă

$$x \in \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \varrho|_L(a)x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a \in L$, atunci

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{W} \implies \varrho(a+\mathrm{i}a')x &= \varrho(a+\mathrm{i}0)x = \varrho(\,(a+\mathrm{i}0) + (0+\mathrm{i})\,(a'+\mathrm{i}0)\,)x \\ &= \varrho(a+\mathrm{i}0)x + \mathrm{i}\varrho(a'+\mathrm{i}0)x = \varrho|_L(a)x + \mathrm{i}\varrho|_L(a')x \in \mathcal{W},\end{aligned}$$

oricare ar fi $a + \mathrm{i}a' \in {}^{\mathbb{C}}L$.

8.4.11 Propoziţie. *Complexificata* ${}^{\mathbb{C}}su(2)$ *a algebrei* $su(2)$ *este izomorfă cu* $sl(2,\mathbb{C})$.

Demonstraţie. Algebra Lie reală $su(2)$ admite baza

$$\left\{ u_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e_1^1 - e_2^2),\ u_2 = -\frac{1}{2}(e_2^1 - e_1^2),\ u_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e_2^1 + e_1^2) \right\}$$

cu

$$[u_1, u_2] = u_3, \qquad [u_2, u_3] = u_1, \qquad [u_3, u_1] = u_2,$$

iar algebra Lie complexă $sl(2,\mathbb{C})$ baza

$$\left\{ \ a_3 = \frac{1}{2}(e_1^1 - e_2^2),\ a_+ = e_1^2,\ a_- = e_2^1 \ \right\}$$

cu

$$[a_3, a_\pm] = \pm a_\pm, \qquad [a_+, a_-] = 2\, a_3.$$

Aplicaţia $\mathbb{C}$-liniară $A : {}^{\mathbb{C}}su(2) \longrightarrow sl(2,\mathbb{C})$, definită prin

$$Au_1 = -\mathrm{i}\, a_3, \qquad Au_2 = \frac{1}{2}\,(a_+ - a_-), \qquad Au_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,(a_+ + a_-),$$

este un izomorfism de algebre Lie deoarece

$$\begin{aligned}
[Au_1, Au_2] &= \left[-\mathrm{i}\, a_3, \tfrac{1}{2}\,(a_+ - a_-)\right] = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,[a_3, a_+] + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\,[a_3, a_-] \\
&= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(a_+ + a_-) = A\, u_3 = A\,[u_1, u_2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Au_2, Au_3] &= \left[\tfrac{1}{2}\,(a_+ - a_-), -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(a_+ + a_-)\right] = -\tfrac{\mathrm{i}}{4}\,([a_+, a_-] - [a_-, a_+]) \\
&= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,[a_+, a_-] = -\mathrm{i}\, a_3 = Au_1 = A\,[u_2, u_3],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Au_3, Au_1] &= \left[-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(a_+ + a_-), -\mathrm{i}\, a_3\right] = -\tfrac{1}{2}\,[a_+, a_3] - \tfrac{1}{2}\,[a_-, a_3] \\
&= -\tfrac{1}{2}\, a_+ - \tfrac{1}{2}\, a_- = Au_2 = A\,[u_3, u_1].
\end{aligned}$$

8.4.12 Din rezultatul prezentat la pag. 276-**10** rezultă că descrierea reprezentarilor ireductibile ale algebrelor Lie izomorfe $o(3)$ şi $su(2)$ este echivalentă cu descrierea reprezentarilor ireductibile ale algebrei Lie complexe ${}^{\mathbb{C}}su(2)$.

Pe de altă parte, din rezultatele prezentate la pag. 266-**3** şi pag. 277-**11** rezultă

că descrierea reprezentărilor ireductibile ale algebrei ${}^{\mathbb{C}}su(2)$ este echivalentă cu descrierea reprezentărilor ireductibile ale algebrei $sl(2,\mathbb{C})$, reprezentări descrise în teorema de la pag. 272-**4**.

8.4.13 Propoziţie. *Plecând de la orice algebră Lie complexă L se poate obţine o algebră Lie reală L_0 prin* restricţia scalarilor*, şi*

$$\dim_{\mathbb{R}} L_0 = 2 \dim_{\mathbb{C}} L.$$

8.4.14 Alegând baze adecvate, se poate arăta că algebra Lie reală $sl(2,\mathbb{C})_0$ obţinută din $sl(2,\mathbb{C})$ prin restricţia scalarilor, este izomorfă cu algebra Lie $o(1,3)$ a grupului Lorentz.

Capitolul 9

Sisteme cuantice cu spaţiu Hilbert finit-dimensional

9.1 Stări pure şi stări mixte

9.1.1 Formalismul matematic utilizat pentru descrierea unui sistem cuantic se bazează pe utilizarea unui spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$, finit sau infinit-dimensional. Vom prezenta câteva elemente ale acestui formalism, limitându-ne la cazul în care $\mathcal{H}$ este finit-dimensional.

9.1.2 Fiecare vector nenul $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ descrie o stare a sistemului cuantic, dar vectorii care se pot obţine unul din altul prin înmulţierea cu o constantă descriu aceeaşi stare. Astfel, toţi vectorii

$$\alpha|\psi\rangle \qquad \text{cu} \qquad \alpha \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$$

descriu aceeaşi stare. În general, pentru descrierea unei stări se preferă utilizarea unui vector $|\psi\rangle$ normat, adică astfel încât

$$||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1.$$

Această restricţie determină vectorul corespunzător unei stări până la un factor de fază deoarece toţi vectorii

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\psi\rangle \qquad \text{cu} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

au aceeaşi normă şi descriu aceeaşi stare.

9.1.3 Spaţiul $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ al operatorilor autoadjuncţi $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definiţi pe un spaţiu Hilbert de dimensiune d este un spaţiu Hilbert real de dimensiune d^2 cu produsul scalar

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB)$$

şi norma asociată

$$||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr} A^2}.$$

9.1.4 Pentru descrierea stării sistemului cuantic, în locul vectorului normat $|\psi\rangle$ se poate utiliza proiectorul ortogonal corespunzător

$$\varrho_\psi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad \varrho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

care este un operator autoadjunct

$$\langle \varrho_\psi \varphi_1, \varphi_2\rangle = \langle \varphi_1, \psi\rangle\langle\psi, \varphi_2\rangle = \langle \varphi_1, \varrho_\psi \varphi_2\rangle,$$

pozitiv

$$\langle \varphi|\varrho_\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle = |\langle\psi|\varphi\rangle|^2 \geq 0,$$

şi cu urma egală cu 1 (v. pag. 118-**10**)

$$\operatorname{tr} \varrho_\psi = \operatorname{tr} |\psi\rangle\langle\psi| = 1.$$

Plecând de la aceste proprietăţi, se defineşte un concept matematic care ne permite să distingem o clasă mai largă de stări ale unui sistem cuantic.

9.1.5 Definiţie. Un operator autoadjunct ϱ, pozitiv şi cu urma egală cu 1

$$\varrho^* = \varrho, \qquad \varrho \geq 0, \qquad \operatorname{tr} \varrho = 1,$$

se numeşte *operator densitate*.

9.1.6 Operatorii densitate descriu *stări generalizate* ale sistemului cuantic. Printre ei se află operatorii de forma $\varrho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ care descriu *stări pure*. Ceilalţi operatori densitate descriu *stări mixte*.

9.1.7 Fiecare operator densitate, fiind autoadjunct, este diagonalizabil, adică există o bază ortonormată $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^d$ astfel încât

$$\varrho = \sum_{j=1}^{d} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|. \tag{9.1}$$

Valorile proprii p_j, care nu sunt obligatoriu distincte, verifică condiţiile

$$p_j \geq 0 \qquad \text{şi} \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j = \operatorname{tr} \varrho = 1$$

din care se deduce imediat că

$$0 \leq p_j \leq 1.$$

Starea ϱ este o suprapunere de stări pure $|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ cu probabilităţile p_j.

9.1.8 Deoarece

$$\varrho^2 = \sum_{j=1}^{d} p_j^2 \, |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

şi

$$0 \leq p_j \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad p_j^2 \leq p_j$$

avem

$$\langle \varrho, \varrho \rangle = \operatorname{tr} \varrho^2 = \sum_{j=1}^{d} p_j^2 \leq \sum_{j=1}^{d} p_j = \operatorname{tr} \varrho = 1,$$

adică

$$||\varrho|| = \sqrt{\langle \varrho, \varrho \rangle} \leq 1.$$

9.1.9 În cazul unei stări pure, există o bază ortonormată $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{d}$ astfel încât

$$\varrho = p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1|,$$

adică în reprezentarea (9.1) doar p_1 este nenul.

Dacă ϱ nu este stare pură, atunci în reprezentarea (9.1) cel puţin două dintre numerele p_j sunt nenule, şi prin urmare

$$\operatorname{tr} \varrho^2 = ||\varrho||^2 = \sum_{j=1}^{d} p_j^2 < \sum_{j=1}^{d} p_j = 1.$$

În cazul unui operator densitate ϱ, avem

$$||\varrho|| = 1 \quad \textit{dacă} \quad \varrho \quad \textit{este stare pură},$$

$$||\varrho|| < 1 \quad \textit{dacă} \quad \varrho \quad \textit{nu este stare pură}.$$

Putem spune că $\operatorname{tr} \varrho^2$ măsoară *puritatea* stării ϱ. Dacă U este o transformare unitară, atunci

$$\mathrm{tr}\,(U\varrho U^*)^2 = \mathrm{tr}\,\varrho^2,$$

adică transformările unitare păstrează nemodificată puritatea stărilor.

9.1.10 Fiecare stare (pură sau mixtă)

$$\varrho = \sum_{j=1}^{d} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

este o suprapunere de stări pure, considerate cu anumite probabilităţi.
Entropia von Neumann (v. pag. 142-**5**)

$$\begin{aligned} S[\varrho] &= -\mathrm{tr}\,(\varrho \ln \varrho) = -\mathrm{tr} \sum_{j=1}^{d} p_j \ln p_j\, |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ &= -\sum_{j=1}^{d} p_j \ln p_j \end{aligned}$$

a stării ϱ este o măsură a gradului de impuritate. Valoarea minimă $S[\varrho]=0$ se atinge în cazul unei stări pure, iar cea maximă $S[\varrho] = \ln d$ în cazul $p_1 = p_2 = p_d = ... = \frac{1}{d}$. Entropia $S[\varrho]$ poate fi privită şi ca o măsură a lipsei de informaţie privind starea ϱ.

9.1.11 [*1] *Operatorul densitate ϱ reprezintă o stare pură dacă şi numai dacă*

$$\varrho^2 = \varrho.$$

În cazul unei stări pure $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ avem

$$\varrho^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \varrho.$$

Oricare ar fi operatorul densitate ϱ există $p_j \in [0,1]$ cu $\sum_{j=1}^{d} p_j = 1$ şi o bază ortonormată $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{d}$ astfel încât

$$\varrho = \sum_{j=1}^{d} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|.$$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^{d} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \sum_{k=1}^{d} p_j |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_{j,k=1}^{d} p_j p_k |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_{j=1}^{d} p_j^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

egalitatea $\varrho^2 = \varrho$ este echivalentă cu relaţia

[1] Paragrafele marcate cu * pot fi omise la o primă lectură.

$$\sum_{j=1}^{d} p_j^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \sum_{j=1}^{d} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

din care rezultă

$$p_k^2 = \langle\psi_k| \sum_{j=1}^{d} p_j^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \langle\psi_k| \sum_{j=1}^{d} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\psi_k\rangle = p_k.$$

Egalitatea $\varrho^2 = \varrho$ are loc dacă şi numai dacă

$$p_k^2 = p_k, \qquad \text{oricare ar fi} \quad k \in \{1, 2, ..., d\}.$$

Deoarece

$$p_k^2 = p_k \quad \Rightarrow \quad p_k \in \{0, 1\},$$

condiţia $\sum_{j=1}^{d} p_j = 1$ este îndeplinită doar în cazul în care doar unul dintre numerele p_1, p_2, ..., p_d este egal cu 1. În acest caz, ϱ reprezintă o stare pură.

9.1.12 * Mulţimea Σ a operatorilor densitate, definiţi pe un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$, este o mulţime convexă în spaţiul vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ al tuturor operatorilor liniari definiţi pe $\mathcal{H}$ deoarece

$$\begin{array}{rcll} \varrho_1 \in \Sigma, & & ((1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2)^* = (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2, & \\ \varrho_1 \in \Sigma, & \Rightarrow & (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2 \geq 0, & \Rightarrow \ (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2 \in \Sigma. \\ \lambda \in [0,1] & & \mathrm{tr}\,((1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2) = 1 & \end{array}$$

9.1.13 * Spunem că $\varrho \in \Sigma$ este *punct extrem* al mulţimii convexe Σ dacă relaţia

$$\varrho = (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2 \qquad \text{cu} \qquad \begin{array}{r} \varrho_1, \varrho_2 \in \Sigma \\ \lambda \in [0,1] \end{array}$$

este posibilă doar în cazul $\varrho = \varrho_1 = \varrho_2$.

9.1.14 * *Orice stare pură este punct extrem al mulţimii convexe* Σ.

Fie starea pură $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ şi $\varrho_1, \varrho_2 \in \Sigma$, $\lambda \in [0,1]$ astfel încât

$$\varrho = (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2.$$

Deoarece $\varrho^2 = \varrho$, ultima relaţie se mai poate scrie

$$\varrho = (1-\lambda)\varrho\varrho_1\varrho + \lambda\varrho\varrho_2\varrho,$$

şi avem

$$1 = (1-\lambda)\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_1\varrho) + \lambda\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_2\varrho). \tag{9.2}$$

Operatorii densitate ϱ_1 şi ϱ_2 verifică relaţiile

$$\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_i\varrho) = \mathrm{tr}\,(\varrho^2\varrho_i) = \mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_i) = \langle\varrho,\varrho_i\rangle \leq |\langle\varrho,\varrho_i\rangle| \leq ||\varrho||\,||\varrho|| \leq 1$$

şi

$$\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_i\varrho) = \sum_{j=1}^{d}\langle e_j, \varrho\varrho_i\varrho e_j\rangle = \sum_{j=1}^{d}\langle\varrho e_j, \varrho_i\varrho e_j\rangle \geq 0,$$

unde $\{e_j\}_{j=1,\ldots,d}$ este o bază ortonormată a lui $\mathcal{H}$.
Dacă am avea $\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_1\varrho) < 1$ sau $\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_1\varrho) < 1$, atunci

$$(1-\lambda)\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_1\varrho) + \lambda\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_2\varrho) < 1,$$

ceea ce ar fi în contradicţie cu relaţia (9.2).
Rămâne că $\mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_1\varrho) = \mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_2\varrho) = 1$, şi prin urmare

$$\langle\varrho,\varrho_i\rangle = \mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_i) = \mathrm{tr}\,(\varrho^2\varrho_i) = \mathrm{tr}\,(\varrho\varrho_i\varrho) = 1.$$

Conform teoremei Cauchy-Schwartz,

$$|\langle\varrho,\varrho_i\rangle|^2 \leq \langle\varrho,\varrho\rangle\,\langle\varrho_i,\varrho_i\rangle.$$

Deoarece $\langle\varrho,\varrho\rangle \leq 1$ şi $\langle\varrho_i,\varrho_i\rangle \leq 1$, avem

$$|\langle\varrho,\varrho_i\rangle|^2 = \langle\varrho,\varrho\rangle\,\langle\varrho_i,\varrho_i\rangle$$

ceea ce ştim că este posibil doar dacă ϱ este de forma $\varrho = c\,\varrho_i$, cu c o constantă.
Din relaţia $\mathrm{tr}\,\varrho = \mathrm{tr}\,\varrho_i = 1$ rezultă $\varrho = \varrho_i$.

9.1.15 * *Orice punct extrem al mulţimii convexe Σ este stare pură.*

Fie ϱ un punct extrem al lui Σ. Ştim că există $p_j \in [0,1]$ cu $\sum_{j=1}^{d} p_j = 1$ şi o bază ortonormată $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{d}$ astfel încât

$$\varrho = \sum_{j=1}^{d} p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j| = p_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \cdots + p_d|\psi_d\rangle\langle\psi_d|.$$

Este suficient să arătăm că fiecare coeficient p_j nu poate fi decât 0 sau 1.
De exemplu, dacă am avea $0 < p_1 < 1$, atunci ϱ ar admite reprezentarea

$$\varrho = p_1\,|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1-p_1)\varrho_1,$$

unde

$$\varrho_1 = \frac{p_2}{1-p_1}\,|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \cdots + \frac{p_d}{1-p_1}\,|\psi_d\rangle\langle\psi_d|,$$

ceea ce este posibil numai dacă

$$\varrho = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \frac{p_2}{1-p_1}\,|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \cdots + \frac{p_d}{1-p_1}\,|\psi_d\rangle\langle\psi_d|.$$

Ultima relaţie nu poate fi adevărată deoarece din ea ar rezulta că

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \frac{p_2}{1-p_1}\,|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_1\rangle + \cdots + \frac{p_d}{1-p_1}\,|\psi_d\rangle\langle\psi_d|\psi_1\rangle,$$

adică $|\psi_1\rangle = 0$. Rămâne că $p_1 = 0$ sau $p_1 = 1$. Printr-un raţionament similar, se obţine că p_2, p_3 , ..., p_d nu pot fi decât 0 sau 1. Din relaţia $\sum_{j=1}^{d} p_j = 1$, rezultă că doar unul dintre coeficienţii p_1, p_2, ..., p_d este egal cu 1, şi prin urmare ϱ este de forma $|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, adică reprezintă o stare pură.

9.2 Sisteme cuantice cu spaţiu Hilbert bidimensional

9.2.1 În cazul unui sistem cuantic descris de un spaţiu Hilbert bidimensional $\mathcal{H}$ (sistem numit *qubit* în engleză), utilizând o bază ortonormată fixată $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, fiecare element $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ poate fi reprezentat unic sub forma

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Izomorfismul liniar

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \,:\, \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ne permite să identificăm spaţiul $\mathcal{H}$ cu spaţiul Hilbert complex bidimensional

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

cu produsul scalar definit prin

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\beta}_1\beta_2.$$

În particular, avem

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{şi} \qquad |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru $|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ şi $|\psi_2\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle$, avem

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\beta}_1\beta_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

9.2.2 Spaţiul $\mathbb{C}^2$ poate fi privit ca fiind spaţiul Hilbert al functiilor

$$\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C} : \ s \mapsto \psi(s)$$

dacă identificăm $\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ cu funcţia

$$\psi : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{definită prin} \quad \begin{array}{l} \psi(0) = \alpha, \\ \psi(1) = \beta. \end{array}$$

9.2.3 În mecanica cuantică, momentul cinetic este o mărime discretă. Singurele valori posibile sunt 0, $\pm\frac{1}{2}\hbar$, $\pm\hbar$, $\pm\frac{3}{2}\hbar$, $\pm 2\hbar$, ... , unde $\hbar$ este constanta lui Planck împărţită cu 2π. Particule cum ar fi electronul, protonul şi neutronul au un moment cinetic intrinsec egal cu $\frac{1}{2}\hbar$, numit *spin*. În acest caz, pentru orice direcţie, valorile posibile ale spinului sunt $\pm\frac{1}{2}\hbar$. Alegând $\frac{1}{2}\hbar$ ca unitate de măsură pentru spin, putem considera că singurele valori posibile sunt ± 1. Dacă se ia în considerare doar spinul, stările particulei pot fi descrise cu ajutorul spaţiului Hilbert $\mathbb{C}^2$. Dacă $|0\rangle$ şi $|1\rangle$ sunt stările proprii în care spinul are valori bine determinate, 1 şi respectiv -1, atunci orice element de forma

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

descrie o stare posibilă a particulei rezultată dintr-o suprapunere a celor două stări.

9.2.4 Spaţiul $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ al operatorilor liniari $A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ este un spaţiu Hilbert de dimensiune 4, cu produsul scalar definit prin relaţia

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B),$$

pentru care operatorii Pauli $\{\sigma_0 = I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ formează o bază ortogonală. Orice operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ se poate reprezenta sub forma

$$A = \frac{1}{2}(r_0\,\sigma_0 + r_1\,\sigma_1 + r_2\,\sigma_2 + r_3\,\sigma_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - \mathrm{i}r_2 \\ r_1 + \mathrm{i}r_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix},$$

cu $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$. Rezolvând ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} \frac{r_0+r_3}{2}-\lambda & \frac{r_1-\mathrm{i}r_2}{2} \\ \frac{r_1+\mathrm{i}r_2}{2} & \frac{r_0-r_3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

se obţin pentru A valorile proprii complexe

$$\lambda_{1,2} = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2}}{2}.$$

9.2.5 Spaţiul $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ al operatorilor autoadjuncţi $A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ este un spaţiu Hilbert real de dimensiune 4 cu produsul scalar definit prin relaţia

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,(AB),$$

pentru care operatorii Pauli $\{\sigma_0 = I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ formează o bază ortogonală. Orice operator $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ se poate reprezenta sub forma

$$A = \frac{1}{2}(r_0\,\sigma_0 + \mathbf{r}\cdot\sigma) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_0+r_3 & r_1-\mathrm{i}r_2 \\ r_1+\mathrm{i}r_2 & r_0-r_3 \end{pmatrix},$$

cu $r_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ şi $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Rezolvând ecuaţia

$$\begin{vmatrix} \frac{r_0+r_3}{2}-\lambda & \frac{r_1-\mathrm{i}r_2}{2} \\ \frac{r_1+\mathrm{i}r_2}{2} & \frac{r_0-r_3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

se obţin pentru A valorile proprii reale

$$\lambda_{1,2} = \frac{r_0 \pm ||\mathbf{r}||}{2}.$$

9.2.6 Deoarece, pentru $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ avem $\mathrm{tr}\,A = r_0$ şi

$$A \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ||\mathbf{r}|| \leq r_0,$$

operatorul A este operator densitate dacă şi numai dacă

$$r_0 = 1 \qquad \text{şi} \qquad ||\mathbf{r}|| \leq 1.$$

Valorile proprii ale unui operator densitate

$$\varrho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1-\mathrm{i}r_2 \\ r_1+\mathrm{i}r_2 & 1-r_3 \end{pmatrix}$$

sunt

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm ||\mathbf{r}||}{2}.$$

Puritatea stării ϱ, adică

$$\operatorname{tr}\varrho^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{2}(1 + ||\mathbf{r}||^2)$$

verifică relaţia

$$\frac{1}{2} \leq \operatorname{tr}\varrho^2 \leq 1,$$

iar *impuritatea*

$$1 - \operatorname{tr}\varrho^2 = \frac{1}{2}(1 - ||\mathbf{r}||^2)$$

relaţia

$$0 \leq 1 - \operatorname{tr}\varrho^2 \leq \frac{1}{2}.$$

9.2.7 Stările posibile (pure sau mixte) ale unui qubit se află în corespondenţă unu-la-unu cu punctele aparţinând sferei închise de rază 1, centrate în origine

$$\Omega_2 = \{\, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \ ||\mathbf{r}|| \leq 1 \,\} = \{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 1 \,\},$$

numită *sfera lui Bloch* sau *sfera lui Poincaré*. Stării pure

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,|1\rangle,$$

descrise de operatorul densitate

$$\varrho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \\ \sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & 1+\cos\theta \end{pmatrix},$$

îi corespunde vectorul unitar

$$\mathbf{r} = (\sin\theta\,\cos\phi,\, \sin\theta\,\sin\phi,\, \cos\theta) \in S^2 = \partial\Omega_2.$$

Stările pure corespund la puncte aparţinând suprafeţei sferei, iar cele mixte la puncte interioare. Puritatea unei stări creşte când ne apropiem de suprafaţa sferei, iar impuritatea când ne apropiem de centrul sferei.

9.2.8 Punctul de pe sferă diametral opus punctului cu coordonatele unghiulare (φ, θ) are coordonatele $(\varphi{+}\pi, \pi{-}\theta)$. Produsul scalar al stărilor pure corespunzătoare

$$\cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,|1\rangle \qquad \text{şi} \qquad \cos\frac{\pi-\theta}{2}\,|0\rangle + \sin\frac{\pi-\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\pi)}\,|1\rangle$$

este zero. Astfel, *fiecare pereche de puncte diametral opuse ale sferei S^2 reprezintă o pereche de stări pure ortogonale.*

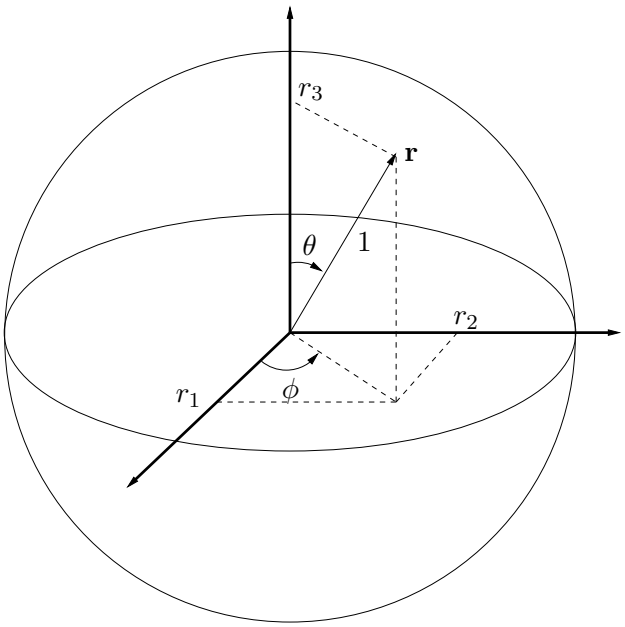

Figura 9.1: Sfera lui Bloch, numită şi sfera lui Poincaré.

9.2.9 În cazul unui qubit, starea

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

este suma normalizată a stărilor $|0\rangle$ şi $|1\rangle$, dar operatorul densitate corespunzător

$$|+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

diferă de suma normalizată

$$\varrho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

a operatorilor densitate corespunzători stărilor $|0\rangle$ şi $|1\rangle$.

9.2.10 Operatorul densitate

$$\varrho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

nu reprezintă o stare pură deoarece nu există o stare

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

astfel încât

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|),$$

sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \tfrac{1}{2}, \\ |\beta|^2 &= \tfrac{1}{2}, \\ \alpha\bar{\beta} &= 0 \end{aligned}$$

neavând soluţii.

9.2.11 În general, *descompunerea unei stări mixte în stări pure nu este unică.*

Notând

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad \text{şi} \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

avem

$$\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|).$$

9.2.12 În spaţiul Hilbert $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, operatorii autoadjuncţi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}I,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3$$

formează o bază ortonormată . Numerele r_0, r_1, r_2, r_3 din relaţa

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_0+r_3 & r_1-\mathrm{i}r_2 \\ r_1+\mathrm{i}r_2 & r_0-r_3 \end{pmatrix},$$

numite *parametrii Stokes ai lui A*, se pot exprima sub forma

$$r_i = \langle A, \sigma_i\rangle = \operatorname{tr}(A\sigma_i).$$

Alte baze ortonormate se pot obţine plecând de la baze ortonormate ale lui $\mathbb{C}^2$. Dacă $\{|u\rangle, |v\rangle\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{C}^2$, atunci operatorii

$$|u\rangle\langle u|, \quad |u\rangle\langle v|, \quad |v\rangle\langle u|, \quad |v\rangle\langle v|$$

formează o bază ortonormată în $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$.

9.2.13 Se ştie că relaţiile

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z &= 1 + \tfrac{z}{1!} + \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^4}{4!} + \dots \\ \cos z &= 1 - \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^4}{4!} - \tfrac{z^6}{6!} + \dots \\ \sin z &= \tfrac{z}{1!} - \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} - \tfrac{z^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

au loc oricare ar fi $z\in\mathbb{C}$.

9.2.14 Dacă operatorul A este astfel încât $A^2=I$, atunci operatorul

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}=I+\frac{\mathrm{i}t}{1!}A+\frac{(\mathrm{i}t)^2}{2!}A^2+\frac{(\mathrm{i}t)^3}{3!}A^3+$$

verifică relaţia

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\dots\right)I+\mathrm{i}\left(\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\dots\right)A,$$

adică avem

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}=\cos t\,I+\mathrm{i}\sin t\,A,\qquad\qquad\text{oricare ar fi } t\in\mathbb{R}.$$

9.2.15 Fie $r=(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{R}^3$ un vector unitar. Deoarece

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=I\qquad\text{şi}\qquad\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1,$$

operatorul

$$r\cdot\sigma=r_1\sigma_1+r_2\sigma_2+r_3\sigma_3$$

verifică relaţia

$$(r\cdot\sigma)^2=I$$

şi prin urmare,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\,r\cdot\sigma}=\cos t\,I+\mathrm{i}\sin t\,r\cdot\sigma,\qquad\qquad\text{oricare ar fi } t\in\mathbb{R}.$$

În particular, operatorii

$$\mathcal{R}_x(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}\sigma_x},\qquad\mathcal{R}_y(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}\sigma_y},\qquad\mathcal{R}_z(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}\sigma_z}$$

verifică relaţiile (a se vedea şi pag. 143-**6**)

$$\mathcal{R}_x(t)=\cos\tfrac{t}{2}\,I-\mathrm{i}\sin\tfrac{t}{2}\,\sigma_x=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & -\mathrm{i}\,\sin\frac{t}{2}\\ -\mathrm{i}\,\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_y(t)=\cos\tfrac{t}{2}\,I-\mathrm{i}\sin\tfrac{t}{2}\,\sigma_y=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_z(t)=\cos\tfrac{t}{2}\,I-\mathrm{i}\sin\tfrac{t}{2}\,\sigma_z=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\end{pmatrix}.$$

9.2.16 * Vectorul Bloch corespunzător stării $\mathcal{R}_x(t)|\psi\rangle$ cu matricea densitate

$$\mathcal{R}_x(t)|\psi\rangle\langle\psi|\mathcal{R}_x^*(t)$$

se obţine rotind în jurul lui Ox vectorul Bloch corespunzător stării $|\psi\rangle$.
Mai general, dacă ϱ este matrice densitate , vectorul corespunzător stării $\mathcal{R}_x(t)\varrho\mathcal{R}_x^*(t)$ se obţine rotind în jurul lui Ox vectorul Bloch corespunzător stării ϱ deoarece

$$\mathcal{R}_x(t)\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1-\mathrm{i}r_2 \\ r_1+\mathrm{i}r_2 & 1-r_3 \end{pmatrix}\mathcal{R}_x^*(t) = \begin{pmatrix} 1+r_3' & r_1'-\mathrm{i}r_2' \\ r_1'+\mathrm{i}r_2' & 1-r_3' \end{pmatrix},$$

cu

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Similar, vectorul corespunzător stării $\mathcal{R}_y(t)\varrho\mathcal{R}_y^*(t)$ se obţine rotind în jurul lui Oy vectorul Bloch corespunzător stării ϱ deoarece

$$\mathcal{R}_y(t)\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1-\mathrm{i}r_2 \\ r_1+\mathrm{i}r_2 & 1-r_3 \end{pmatrix}\mathcal{R}_y^*(t) = \begin{pmatrix} 1+r_3' & r_1'-\mathrm{i}r_2' \\ r_1'+\mathrm{i}r_2' & 1-r_3' \end{pmatrix},$$

cu

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Vectorul corespunzător stării $\mathcal{R}_z(t)\varrho\mathcal{R}_z^*(t)$ se obţine rotind în jurul lui Oz vectorul Bloch corespunzător stării ϱ deoarece

$$\mathcal{R}_z(t)\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1-\mathrm{i}r_2 \\ r_1+\mathrm{i}r_2 & 1-r_3 \end{pmatrix}\mathcal{R}_z^*(t) = \begin{pmatrix} 1+r_3' & r_1'-\mathrm{i}r_2' \\ r_1'+\mathrm{i}r_2' & 1-r_3' \end{pmatrix},$$

cu

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

9.2.17 * *Transformările unitare corespund rotaţiilor sferei Bloch.*
O transformare unitară $U : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ este o transformare cu proprietatea

$$UU^* = U^*U = I.$$

Elementele matricei corespunzătoare

$$U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{pmatrix}$$

verifică relaţiile

$$\begin{aligned} &|u_{00}|^2 + |u_{01}|^2 = 1, && |u_{00}|^2 + |u_{10}|^2 = 1, \\ &|u_{10}|^2 + |u_{11}|^2 = 1, && |u_{01}|^2 + |u_{11}|^2 = 1, \\ &\bar{u}_{00}u_{10} + \bar{u}_{01}u_{11} = 0, && \bar{u}_{00}u_{01} + \bar{u}_{10}u_{11} = 0. \end{aligned}$$

O matrice verifică primele patru relaţii dacă şi numai dacă este de forma

$$U = \begin{pmatrix} \cos\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{2}} & -\sin\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{b}{2}} \\ \sin\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{c}{2}} & \cos\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d}{2}} \end{pmatrix}.$$

Pentru a verifica şi ultimele două relaţii, este necesar şi suficient ca

$$a - c = b - d,$$

adică să fie de forma

$$U = \begin{pmatrix} \cos\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{2}} & -\sin\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{b}{2}} \\ \sin\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{c}{2}} & \cos\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{b+c-a}{2}} \end{pmatrix}.$$

Ultima matrice se poate scrie sub forma

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{b+c}{4}} \begin{pmatrix} \cos\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(a-b)+(a-c)}{2}} & -\sin\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(a-c)-(a-b)}{2}} \\ \sin\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(a-c)-(a-b)}{2}} & \cos\frac{t'}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(a-b)+(a-c)}{2}} \end{pmatrix}$$

sau

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{b+c}{4}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{t'}{2} & -\sin\frac{t'}{2} \\ \sin\frac{t'}{2} & \cos\frac{t'}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t''}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t''}{2}} \end{pmatrix},$$

adică sub forma unui produs de rotaţii înmulţit cu un factor de fază

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{b+c}{4}}\,\mathcal{R}_z(t)\,\mathcal{R}_y(t')\,\mathcal{R}_z(t''),$$

unde $t = \frac{a-b}{2}$ şi $t'' = \frac{a-c}{2}$.

9.2.18 Operaţiile logice cu stări cuantice, cu ajutorul cărora se procesează informaţia cuantică, sunt descrise de opertori unitari (numiţi *quantum gates* în engleză). Printre transformările unitare frecvent utilizate se află transformările Pauli

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \quad \text{cu matricea} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \mathrm{i}|1\rangle\langle 0| - \mathrm{i}|0\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

transformarea Hadamard

$$H = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \quad \text{cu matricea} \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

transformarea de fază

$$S = |0\rangle\langle 0| + \mathrm{i}\,|1\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

transformarea $\pi/8$

$$T = |0\rangle\langle 0| + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,|1\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \end{pmatrix}.$$

şi rotaţiile $\mathcal{R}_x(t)$, $\mathcal{R}_y(t)$, $\mathcal{R}_z(t)$.

9.3 Măsurători ideale

9.3.1 Orice informaţie referitoare la un sistem cuantic se poate obţine doar în urma unei măsurători. Descrierea oferită de mecanica cuantică nu este una deterministă: măsurând aceeaşi observabilă în cazul a două sisteme aflate în aceeaşi stare, preparate identic, rezultatele obţinute pot fi diferite.

9.3.2 Fiecare operator autoadjunct $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ admite descompunerea spectrală

$$A = \sum_{\lambda} \lambda \, P_\lambda,$$

unde λ parcurge valorile proprii ale lui A, iar P_λ sunt proiectorii ortogonali pe subspaţiile proprii corespunzătoare. Operatorii P_λ verifică relaţiile

$$\sum_{\lambda} P_\lambda = I, \qquad P_\lambda^* = P_\lambda = P_\lambda^2, \qquad P_\lambda P_{\lambda'} = \begin{cases} P_\lambda & \text{dacă} \quad \lambda = \lambda' \\ 0 & \text{dacă} \quad \lambda \neq \lambda'. \end{cases}$$

9.3.3 O *măsurătoare ideală* corespunde unui operator autoadjunct (observabila)

$$A = \sum_{\lambda} \lambda \, P_\lambda$$

care satisface condiţiile:

1) singurele rezultate care se pot obţine sunt valorile proprii λ;

2) în starea ϱ rezultatul λ se obţine cu probabilitatea

$$p(\lambda) = \operatorname{tr}(\varrho P_\lambda);$$

3) în cazul obţinerii rezultatului λ, starea după măsurătoare devine

$$\varrho' = \frac{P_\lambda \varrho P_\lambda}{p(\lambda)}.$$

O măsurătoare ideală mai este numită şi *proiectivă* sau *von Neumann*.

9.3.4 În cazul unei stări pure $|\psi\rangle$, operatorul densitate $\varrho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ verifică relaţia

$$\operatorname{tr}(\varrho_\psi P_\lambda) = \langle\psi|P_\lambda|\psi\rangle.$$

În starea pură $|\psi\rangle$, rezultatul λ se obţine cu probabilitatea

$$p(\lambda) = \langle\psi|P_\lambda|\psi\rangle$$

iar starea sistemului după măsurătoare este starea pură

$$|\psi_\lambda\rangle = \frac{P_\lambda|\psi\rangle}{\sqrt{p(\lambda)}}.$$

9.3.5 Starea post-măsurătoare $|\psi_\lambda\rangle$ este o stare proprie a observabilei măsurate

$$A|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle.$$

Dacă subspaţiul propriu corespunzător valorii λ este unidimensional, aparatul cu care s-a măsurat observabila A poate fi utilizat pentru a prepara sisteme cuantice în starea $|\psi_\lambda\rangle$.

9.3.6 *Valoarea medie* a observabilei A în starea ϱ este

$$\langle A\rangle = \sum_\lambda \lambda\, p(\lambda) = \mathrm{tr}\,(\varrho A).$$

În cazul unei stări pure $|\psi\rangle$, valoarea medie a lui A este

$$\langle A\rangle = \sum_\lambda \lambda\, p(\lambda) = \langle\psi|A|\psi\rangle.$$

9.3.7 În cazul unui qubit, observabila σ_3 admite reprezentarea spectrală

$$\sigma_3 = 1\cdot P_1 + (-1)\cdot P_{-1}, \qquad \text{unde} \qquad \begin{matrix} P_1 = |0\rangle\langle 0| \\ P_{-1} = |1\rangle\langle 1|. \end{matrix}$$

Măsurând observabila σ_3 în starea

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \qquad \text{cu} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

se obţine rezultatul $\lambda{=}1$ cu probabilitatea

$$p(1) = \langle\psi|P_1|\psi\rangle = |a|^2$$

şi rezultatul $\lambda{=}-1$ cu probabilitatea

$$p(-1) = \langle\psi|P_{-1}|\psi\rangle = |b|^2.$$

După măsurătoare, starea sistemului devine

$$\frac{P_1|\psi\rangle}{\sqrt{p(1)}} = \frac{a}{|a|}|0\rangle$$

în cazul în care rezultatul este $\lambda = 1$ şi

$$\frac{P_{-1}|\psi\rangle}{\sqrt{p(-1)}} = \frac{b}{|b|}|1\rangle$$

în cazul $\lambda = -1$. Dar starea $\frac{a}{|a|}|0\rangle$ coincide cu $|0\rangle$ şi $\frac{b}{|b|}|1\rangle$ cu $|1\rangle$.
Valoarea medie a observabilei σ_3 în starea $|\psi\rangle$ este

$$\langle\psi|\sigma_3|\psi\rangle = |a|^2 - |b|^2.$$

Măsurând observabila σ_3 în starea

$$\varrho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - \mathrm{i}r_2 \\ r_1 + \mathrm{i}r_2 & 1-r_3 \end{pmatrix}$$

se obţine rezultatul $\lambda = 1$ cu probabilitatea

$$p(1) = \operatorname{tr}(\varrho P_1) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - \mathrm{i}r_2 \\ r_1 + \mathrm{i}r_2 & 1-r_3 \end{pmatrix} = \frac{1+r_3}{2}$$

şi rezultatul $\lambda = -1$ cu probabilitatea

$$p(-1) = \operatorname{tr}(\varrho P_{-1}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - \mathrm{i}r_2 \\ r_1 + \mathrm{i}r_2 & 1-r_3 \end{pmatrix} = \frac{1-r_3}{2}.$$

După măsurătoare, starea sistemului devine

$$\frac{P_1\varrho P_1}{\operatorname{tr}(P_1\varrho P_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0|$$

în cazul în care rezultatul este $\lambda = 1$ şi

$$\frac{P_{-1}\varrho P_{-1}}{\operatorname{tr}(P_{-1}\varrho P_{-1})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 1|$$

dacă $\lambda = -1$, adică $|0\rangle$ în primul caz şi $|1\rangle$ în al doilea.

9.3.8 Dacă se ştie că sistemul cuantic a fost preparat în una dintre stările ortogonale $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, ... , $|\psi_n\rangle$, atunci măsurând observabila

$$A = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + 2\,|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + ... + n\,|\psi_n\rangle\langle\psi_n| = P_1 + 2P_2 + ... + nP_n$$

se poate identifica starea în care a fost preparat sistemul fără a o modifica. Singurele rezultate care se pot obţine în urma măsurătorii sunt 1, 2, ... , n. Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_k\rangle$, atunci se va obţine rezultatul k, şi rezultatul k se va obţine numai în acest caz deoarece

$$p(j) = \langle\psi_k|P_j|\psi_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad j = k, \\ 0 & \text{dacă} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Obţinerea rezultatului k va indica faptul că sistemul a fost pregătit în starea $|\psi_k\rangle$ şi ştim că după măsurătoare starea va fi

$$\frac{P_k|\psi_k\rangle}{p(k)} = |\psi_k\rangle.$$

Dacă sistemul ortonormat $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, ..., |\psi_n\rangle\}$ nu este bază în spaţiul Hilbert al sistemului cuantic, atunci 0 este valoare proprie a lui A şi

$$A = 0P_0 + P_1 + 2P_2 + ... + nP_n \qquad \text{cu} \qquad P_0 = I - P_1 - P_2 - ... - P_n.$$

În cazul în care sistemul cuantic a fost preparat în una dintre stările ortogonale $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, ... , $|\psi_n\rangle$, rezultatul 0 nu se poate obţine.

9.3.9 Dacă vectorii unitari $|\psi_1\rangle$ şi $|\psi_2\rangle$ nu sunt ortogonali, atunci vectorul normat

$$|\psi_1^{\perp}\rangle = \frac{|\psi_2\rangle - |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_2\rangle}{\sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}}$$

este ortogonal pe $|\psi_1\rangle$ şi $|\psi_2\rangle$ admite descompunerea

$$|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle|\psi_1\rangle + \sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}\,|\psi_1^{\perp}\rangle.$$

9.3.10 Dacă se ştie că sistemul cuantic a fost preparat în una dintre stările neortogonale $|\psi_1\rangle$ şi $|\psi_2\rangle$, atunci măsurând observabila (v. pag. 298-**9**)

$$A = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + 2|\psi_1^{\perp}\rangle\langle\psi_1^{\perp}| = P_1 + 2P_2$$

nu se obţine o informaţie completă privind starea sistemului.
Singurele rezultate care se pot obţine în urma măsurătorii sunt 1 şi 2.
Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_1\rangle$, atunci se obţine:
- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle\psi_1|P_1|\psi_1\rangle = 1$ şi
- rezultatul 2 cu probabilitatea $p(2) = \langle\psi_1|P_2|\psi_1\rangle = 0$.

Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_2\rangle$, atunci se obţine:
- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle\psi_2|P_1|\psi_2\rangle = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$ şi
- rezultatul 2 cu probabilitatea $p(2) = \langle\psi_2|P_2|\psi_2\rangle = 1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$.

Prin urmare:
- rezultatul 2 indică starea $|\psi_2\rangle$;
- rezultatul 1 nu permite identificarea stării.

9.3.11 O stare $|\psi\rangle$ rămâne nemodificată în urma unei măsurători dacă alegem o observabilă A pentru care $|\psi\rangle$ este stare proprie. Dacă starea $|\psi\rangle$ este necunoscută, nu avem cum să alegem măsurători care să o lase nemodificată.
Probabilitatea

$$p(\lambda) = \langle\psi|P_\lambda|\psi\rangle = \langle\psi|P_\lambda^* P_\lambda|\psi\rangle = ||P_\lambda\psi||^2$$

este pătratul lungimii proiecţiei vectorului $|\psi\rangle$ pe subspaţiul propriu corespunzător valorii λ. Măsurând o observabilă A într-o stare necunoscută $|\psi\rangle$, obţinem ca rezultat o valoare proprie λ a lui A şi putem deduce doar că $p(\lambda) = ||P_\lambda \psi||^2 \neq 0$. După măsurătoare, din starea necunoscută $|\psi\rangle$ mai rămânem doar cu proiecţia ei pe un subspaţiu propriu al lui A.

9.3.12 Dacă am dispune de un număr mare de copii ale sistemului cuantic pregătite în starea $|\psi\rangle$ şi dacă am repeta măsurătoarea observabilei A, rezultatele obţinute ar fi distribuite în jurul valorii medii $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$.
O măsură a gradului de dispersare a lor este dată de *abaterea medie pătratică*

$$\Delta A = \sqrt{\langle\psi, (A - \langle A\rangle)^2\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi, A^2\psi\rangle - \langle\psi, A\psi\rangle^2},$$

adică

$$\Delta A = \sqrt{\langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}.$$

9.3.13 Deoarece σ_1 admite reprezentarea spectrală

$$\sigma_1 = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \qquad \text{cu} \qquad |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle),$$

măsurând σ_1 în starea $|0\rangle$ se obţine:
- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle 0|+\rangle\langle+|0\rangle = \frac{1}{2}$ şi
- rezultatul -1 cu probabilitatea $p(-1) = \langle 0|-\rangle\langle-|0\rangle = \frac{1}{2}$.

Prin urmare, se pot obţine ambele rezultate şi valoarea medie a lui σ_1 este

$$\langle\sigma_1\rangle = \langle 0|\sigma_1|0\rangle = 0.$$

Deoarece $\sigma_1^2 = I$, în starea $|0\rangle$ avem

$$\langle\sigma_1^2\rangle = 1 \qquad \text{şi} \qquad \Delta\sigma_1 = \sqrt{\langle\sigma_1^2\rangle - \langle\sigma_1\rangle^2} = 1.$$

Similar, se poate arăta că în starea $|0\rangle$ avem

$$\langle\sigma_2\rangle = 0, \qquad \langle\sigma_2^2\rangle = 1 \qquad \text{şi} \qquad \Delta\sigma_2 = 1.$$

9.3.14 Dacă $|\psi\rangle$ este stare proprie a observabilei A,

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle,$$

atunci, în starea $|\psi\rangle$, avem

$$\Delta A = \sqrt{\langle\psi, A^2\psi\rangle - \langle\psi, A\psi\rangle^2} = 0.$$

9.3.15 * **Teoremă** (Relaţia de incertitudine).

Dacă $A, B : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *sunt doi operatori autoadjuncţi şi*

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle}, \qquad \Delta B = \sqrt{\langle \psi, (B - \langle B \rangle)^2 \psi \rangle},$$

atunci

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|}{2},$$

oricare ar fi starea normată $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Demonstraţie. Fie $C = A - \langle A \rangle$, $D = B - \langle B \rangle$ şi

$$\langle C\psi, D\psi \rangle = \alpha + \beta \mathrm{i} \qquad \text{cu} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Din relaţiile

$$\langle \psi, CD\psi \rangle = \langle C\psi, D\psi \rangle = \alpha + \beta \mathrm{i}$$
$$\langle \psi, DC\psi \rangle = \langle D\psi, C\psi \rangle = \alpha - \beta \mathrm{i}$$

rezultă că

$$\langle \psi, [C, D]\psi \rangle = \langle \psi, CD\psi \rangle - \langle \psi, DC\psi \rangle = 2\beta \mathrm{i}$$
$$\langle \psi, \{C, D\}\psi \rangle = \langle \psi, CD\psi \rangle + \langle \psi, DC\psi \rangle = 2\alpha$$

şi prin urmare

$$|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2 + |\langle \psi, \{C, D\}\psi \rangle|^2 = 4\, |\langle C\psi, D\psi \rangle|^2.$$

Însă, conform inegalităţii Cauchy-Schwarz,

$$|\langle C\psi, D\psi \rangle|^2 \leq \langle C\psi, C\psi \rangle \, \langle D\psi, D\psi \rangle.$$

Deoarece $\langle C\psi, C\psi \rangle = \langle \psi, C^2\psi \rangle$ şi $\langle D\psi, D\psi \rangle = \langle \psi, D^2\psi \rangle$, din ultimele relaţii obţinem

$$|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2 \leq 4\, |\langle C\psi, D\psi \rangle|^2 \leq 4\, \langle \psi, C^2\psi \rangle \, \langle \psi, D^2\psi \rangle,$$

adică inegalitatea

$$\langle \psi, C^2\psi \rangle \, \langle \psi, D^2\psi \rangle \geq \frac{|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2}{4}.$$

Utilizând relaţiile

$$\langle \psi, C^2\psi \rangle = \langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle = (\Delta A)^2,$$
$$\langle \psi, D^2\psi \rangle = \langle \psi, (B - \langle B \rangle)^2 \psi \rangle = (\Delta B)^2,$$
$$\langle \psi, [C, D]\psi \rangle = \langle \psi, [A, B]\psi \rangle,$$

ultima inegalitate se mai scrie

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{|\langle \psi, [A, B]\psi \rangle|}{2}.$$

9.3.16 Dacă pregătim un număr mare de sisteme cuantice identice, toate în aceeaşi stare $|\psi\rangle$, şi le utilizăm pe unele dintre ele pentru a măsura observabila A , iar pe celelalte pentru a măsura observabila B, atunci abaterile medii pătratice ΔA şi ΔB verifică relaţia de incertitudine

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|}{2}.$$

9.3.17 Observabilele σ_1 şi σ_2 verifică relaţia

$$[\sigma_1,\sigma_2] = 2\mathrm{i}\,\sigma_3,$$

şi prin urmare

$$\Delta\sigma_1\,\Delta\sigma_2 \geq \frac{|\langle\psi|2\mathrm{i}\,\sigma_3|\psi\rangle|}{2},$$

oricare ar fi starea normată $|\psi\rangle\in\mathbb{C}^2$. În cazul $|\psi\rangle=|0\rangle$, avem (v. pag. 299-**13**)

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = 1, \qquad \sigma_3|0\rangle = |0\rangle,$$

şi prin urmare, egalitate în relaţia de incertitudine

$$\Delta\sigma_1\,\Delta\sigma_2 = \frac{|\langle 0|2\mathrm{i}\,\sigma_3|0\rangle|}{2}.$$

9.3.18 * *Dacă s-ar putea obţine copii identice ale unei stări cuantice necunoscute* (v. pag. 306-**12**), *atunci starea ar putea fi identificată.*

Orice stare a unui qubit poate fi descrisă cu ajutorul unui vector

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|1\rangle \qquad \text{cu} \quad \begin{array}{l}\alpha\in[0,1],\\ \beta=\sqrt{1-\alpha^2},\\ \theta\in(-\pi,\pi].\end{array}$$

Măsurând observabila $\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ se obţine rezultatul 1 cu probabilitatea α^2 şi rezultatul -1 cu probabilitatea β^2. După măsurătoare, qubit-ul ajunge în starea $|0\rangle$ în primul caz şi în starea $|1\rangle$ în al doilea. Dacă dispunem de un număr mare de copii ale stării $|\psi\rangle$, atunci coeficienţii α şi β pot fi determinaţi cu mare precizie. Vectorii $(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}$ şi $(|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}$ sunt vectori proprii ai observabilei $\sigma_1 = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$, corespunzători valorilor proprii 1 şi -1. Deoarece

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{2}}\,\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha-\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{2}}\,\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

măsurând σ_1, obţinem rezultatul 1 cu probabilitatea $|\alpha+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2/2$ şi rezultatul -1 cu probabilitatea $|\alpha-\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2/2$. După măsurătoare, qubit-ul ajunge în starea $(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}$ în primul caz şi în starea $(|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}$ în al doilea. Dacă dispunem de un număr mare de copii ale stării $|\psi\rangle$, atunci

$$\cos\theta = \frac{1}{2\alpha\beta}\left(\frac{|\alpha+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}{2} - \frac{|\alpha-\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}{2}\right)$$

poate fi determinat cu mare precizie. Vectorii $(|0\rangle+\mathrm{i}|1\rangle)/\sqrt{2}$ şi $(|0\rangle-\mathrm{i}|1\rangle)/\sqrt{2}$ sunt vectori proprii ai observabilei $\sigma_2 = \mathrm{i}|1\rangle\langle 0|-\mathrm{i}|0\rangle\langle 1|$, corespunzători valorilor proprii 1 şi -1. Deoarece

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{2}}\,\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha-\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{2}}\,\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

măsurând σ_2, obţinem rezultatul 1 cu probabilitatea $|\alpha-\mathrm{i}\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2/2$ şi rezultatul -1 cu probabilitatea $|\alpha+\mathrm{i}\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2/2$. După măsurătoare, qubit-ul ajunge în starea $(|0\rangle+\mathrm{i}|1\rangle)/\sqrt{2}$ în primul caz şi în starea $(|0\rangle-\mathrm{i}|1\rangle)/\sqrt{2}$ în al doilea. Dacă dispunem de un număr mare de copii ale stării $|\psi\rangle$, atunci

$$\sin\theta = \frac{1}{2\alpha\beta}\left(\frac{|\alpha-\mathrm{i}\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}{2} - \frac{|\alpha+\mathrm{i}\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}{2}\right)$$

poate fi determinat cu mare precizie.

9.4 Măsurători generalizate

9.4.1 În cazul unei măsurători ideale, starea post-măsurătoare este o stare proprie a operatorului autoadjunct asociat şi repetarea măsurătorii va da acelaşi rezultat. În realitate însă, multe dintre măsurătorile efectuate în laborator nu sunt de acest tip. De exemplu, un fotodetector detectează prezenţa unui foton absorbindu-l, astfel că repetarea măsurătorii nu mai este posibilă.

9.4.2 Relaţiile referitoare la o măsurătoare ideală

$$\sum_\lambda P_\lambda = I, \qquad p(\lambda) = \mathrm{tr}\,(\varrho P_\lambda), \qquad p(\lambda) = \langle\psi|P_\lambda|\psi\rangle$$

se mai pot scrie sub forma

$$\sum_\lambda P_\lambda^* P_\lambda = I, \qquad p(\lambda) = \mathrm{tr}\,(P_\lambda \varrho P_\lambda^*), \qquad p(\lambda) = \langle\psi|P_\lambda^* P_\lambda|\psi\rangle.$$

9.4.3 O *măsurătoare generalizată* corespunde unui sistem de operatori $\{M_\lambda\}$, indexaţi folosind valorile λ care se pot obţine în urma măsurătorii, şi care satisface condiţiile:

1) $$\sum_\lambda M_\lambda^* M_\lambda = I;$$

2) în starea ϱ rezultatul λ se obţine cu probabilitatea

$$p(\lambda) = \mathrm{tr}\,(M_\lambda \varrho M_\lambda^*);$$

3) în cazul obţinerii rezultatului λ, starea după măsurătoare devine

$$\varrho' = \frac{M_\lambda \varrho M_\lambda^*}{p(\lambda)}.$$

9.4.4 În cazul unei stări pure $|\psi\rangle$, operatorul densitate $\varrho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ verifică relaţia

$$\mathrm{tr}\,(M_\lambda \varrho_\psi M_\lambda^*) = \langle\psi|M_\lambda^* M_\lambda|\psi\rangle.$$

În starea pură $|\psi\rangle$, rezultatul λ se obţine cu probabilitatea

$$p(\lambda) = \langle\psi|M_\lambda^* M_\lambda|\psi\rangle,$$

iar starea sistemului după măsurătoare este starea pură

$$|\psi_\lambda\rangle = \frac{M_\lambda|\psi\rangle}{\sqrt{p(\lambda)}}.$$

9.4.5 Dacă $\{M_\lambda\}$ este măsurătoare generalizată, atunci operatorii $\{E_\lambda\}$, unde

$$E_\lambda = M_\lambda^* M_\lambda$$

sunt autoadjuncţi

$$E_\lambda^* = (M_\lambda^* M_\lambda)^* = M_\lambda^* M_\lambda = E_\lambda,$$

pozitivi

$$\langle\psi, E_\lambda\psi\rangle = \langle\psi, M_\lambda^* M_\lambda\psi\rangle = \langle M_\lambda\psi, M_\lambda\psi\rangle \geq 0$$

şi

$$\sum_\lambda E_\lambda = \sum_\lambda M_\lambda^* M_\lambda = I.$$

9.4.6 Definiţie. Un set de operatori $\{A_\lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}\}$, satisfăcând condiţiile

$$A_\lambda^* = A_\lambda, \qquad A_\lambda \geq 0 \qquad \text{şi} \qquad \sum_\lambda A_\lambda = I, \tag{9.3}$$

este numit *măsură cu valori operatori probabilitate* (POVM).

9.4.7 Dacă $\{M_\lambda\}$ este măsurătoare generalizată, atunci $\{E_\lambda = M_\lambda^* M_\lambda\}$ este POVM. Invers, dacă $\{E_\lambda\}$ este POVM, atunci $\{M_\lambda = \sqrt{E_\lambda}\,\}$ este o măsurătoare generalizată cu proprietatea

$$M_\lambda^* M_\lambda = E_\lambda.$$

Măsurătoarea generalizată corespunzătoare lui $\{E_\lambda\}$ nu este unică: dacă $\{U_\lambda\}$ sunt operatori unitari, atunci $\{M_\lambda = U_\lambda \sqrt{E_\lambda}\,\}$ este o măsurătoare generalizată cu proprietatea

$$M_\lambda^* M_\lambda = \sqrt{E_\lambda}\, U_\lambda^* U_\lambda \sqrt{E_\lambda} = E_\lambda.$$

9.4.8 Un POVM $\{E_\lambda\}$ corespunde la mai multe măsurători $\{M_\lambda\}$, dar din relaţia

$$p(\lambda) = \mathrm{tr}\,(M_\lambda \varrho M_\lambda^*) = \mathrm{tr}\,(\varrho M_\lambda M_\lambda^*) = \mathrm{tr}\,(\varrho E_\lambda).$$

rezultă că probabilităţile $p(\lambda)$ sunt aceleaşi. Dacă nu suntem interesaţi de starea post-măsurătoare, putem considera că fiecare POVM $\{E_\lambda\}$ reprezintă o măsurătoare generalizată.

9.4.9 * Dacă se ştie că sistemul cuantic a fost pregătit în una dintre stările neortogonale $|\psi_1\rangle$ şi $|\psi_2\rangle$, atunci nu există o măsurătoare generalizată $\{E_\lambda\}$ care să ne permită să indicăm în ce stare a fost pregătit sistemul. Admiţând că ar exista o astfel de mşurătoare $\{E_\lambda\}$, ar trebui ca fiecare rezultat λ să indice una şi numai una dintre stările $|\psi_1\rangle$ şi $|\psi_2\rangle$. Dacă $\mathcal{E}_1$ este suma operatorilor E_λ care corespund lui $|\psi_1\rangle$, şi $\mathcal{E}_2$ a celor care corespund lui $|\psi_2\rangle$, atunci

$$\langle\psi_1|\mathcal{E}_1|\psi_1\rangle = 1 \qquad \text{şi} \qquad \langle\psi_2|\mathcal{E}_2|\psi_2\rangle = 1.$$

Deoarece $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = I$, din prima relaţie rezultă că

$$\langle\sqrt{\mathcal{E}_2}\,\psi_1, \sqrt{\mathcal{E}_2}\,\psi_1\rangle = \langle\psi_1, \mathcal{E}_2\psi_1\rangle = \langle\psi_1, (I - \mathcal{E}_1)\psi_1\rangle = 0,$$

şi prin urmare avem $\sqrt{\mathcal{E}_2}|\psi_1\rangle = 0$, ceea ce implică $\mathcal{E}_2|\psi_1\rangle = 0$. Utilizând descompunerea ortogonală (v. pag. 298-**9**)

$$|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle|\psi_1\rangle + \sqrt{1-|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}\,|\psi_1^\perp\rangle,$$

obţinem că

$$\langle\psi_2|\mathcal{E}_2|\psi_2\rangle = (1-|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2)\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle.$$

Deoarece $\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_1|\psi_1^\perp\rangle \geq 0$ şi $\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle \geq 0$, din relaţia

$$\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_1|\psi_1^\perp\rangle + \langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle = \langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle = \langle\psi_1^\perp|\psi_1^\perp\rangle = 1$$

rezultă că

$$\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle \leq 1,$$

şi prin urmare

$$\langle\psi_2|\mathcal{E}_2|\psi_2\rangle \leq (1-|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2) < 1,$$

în contradicţie cu $\langle\psi_2|\mathcal{E}_2|\psi_2\rangle = 1$.

9.4.10 În cazul unei măsurători ideale, rezultatele posibile λ fiind valorile proprii ale operatorului autoadjunct corespunzător, numărul lor nu poate depăşi dimensiunea spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$. În schimb, în cazul unei măsurători generalizate, numărul rezultatelor posibile λ coincide cu numărul operatorilor E_λ şi poate depăşi dimensiunea spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$.

9.4.11 Ştiind că sistemul cuantic a fost preparat în una dintre stările neortogonale

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \qquad \text{şi} \qquad |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

utilizăm măsurătoarea generalizată $\{E_1, E_2, E_3\}$, unde

$$E_1 = \tfrac{1}{2+\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad E_2 = \tfrac{1}{2+\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \quad E_3 = \tfrac{1}{2+\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1 & 1\\ 1 & \sqrt{2}-1\end{pmatrix},$$

pentru a identifica starea în care a fost preparat sistemul.
Singurele rezultate care se pot obţine în urma măsurătorii sunt 1, 2 şi 3.
Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_1\rangle$, atunci se obţine:

- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$,
- rezultatul 2 cu probabilitatea $p(2) = \langle\psi_1|E_2|\psi_1\rangle = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$,
- rezultatul 3 cu probabilitatea $p(3) = \langle\psi_1|E_3|\psi_1\rangle = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_2\rangle$, atunci se obţine:
- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle\psi_2|E_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$,
- rezultatul 2 cu probabilitatea $p(2) = \langle\psi_2|E_2|\psi_2\rangle = 0$,
- rezultatul 3 cu probabilitatea $p(3) = \langle\psi_2|E_3|\psi_2\rangle = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Prin urmare:
- rezultatul 1 indică starea $|\psi_2\rangle$,
- rezultatul 2 indică starea $|\psi_1\rangle$,
- rezultatul 3 nu permite identificarea stării.

Informaţia oferită de măsurătoarea generalizată $\{E_1, E_2, E_3\}$ este mai bogată decât cea oferită de măsurătoarea ideală prezentată la pag. 298-**10**.

9.4.12 Există argumente puternice în favoarea faptului că *o stare cuantică necunoscută nu poate fi clonată*, adică nu se pot obţine copii identice ale ei (v. [26] (pag. 532)). Este util să obţinem cât mai multă informaţie cu ajutorul unei singure măsurători.
Există măsurători care se pot face simultan (*joint measurements*, în engleză). De exemplu, dacă $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ este o măsurătoare generalizată, atunci $\{E_1' = E_1+E_2, E_2' = E_3+E_4\}$ şi $\{E_1'' = E_1+E_3, E_2'' = E_2+E_4\}$ sunt şi ele măsurători. Efectuând măsurătoarea $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ putem considera că am făcut simultam măsurătorile $\{E_1', E_2'\}$ şi $\{E_1'', E_2''\}$.

9.5 Sisteme compuse

9.5.1 Orice spaţiu Hilbert d-dimensional $\mathcal{H}$ este izomorf cu $\mathbb{C}^d$ şi poate fi privit ca fiind spaţiul tuturor funcţiilor complexe definite pe o mulţime cu d elemente. În loc de $\mathcal{H}$ putem utiliza spaţiul $\mathbb{C}^d$, privit ca fiind spaţiul de funcţii

$$\{\varphi : \{0, 1, ..., d-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ \varphi \text{ este funcţie}\}$$

cu produsul scalar

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \sum_{k=0}^{d-1} \overline{\varphi(k)}\, \psi(k).$$

Sistemul de funcţii $\{\delta_0, \delta_1, ..., \delta_{d-1}\}$, unde

$$\delta_k : \{0, 1, ..., d-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \delta_k(j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad j = k, \\ 0 & \text{dacă} \quad j \neq k \end{cases}$$

este bază ortonormată, numită baza computaţională.

9.5.2 Fiecărui element $\varphi \in \mathbb{C}^d$ îi corespunde forma liniară

$$\langle\varphi| : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \ |\psi\rangle \mapsto \langle\varphi|\psi\rangle.$$

Scriind $|k\rangle$ în loc de δ_k şi $|\varphi\rangle$ în loc de φ, avem

$$\langle k|\varphi\rangle = \langle\delta_k, \varphi\rangle = \varphi(k), \qquad \langle k|j\rangle = \delta_{kj}, \qquad \sum_k |k\rangle\langle k| = I$$

şi

$$|\varphi\rangle = I|\varphi\rangle = \sum_k |k\rangle\langle k|\varphi\rangle = \sum_k \varphi(k)\,|k\rangle,$$
$$\langle\varphi| = \langle\varphi|I = \sum_k \langle\varphi|k\rangle\langle k| = \sum_k \overline{\varphi(k)}\,\langle k|.$$

Dacă $A : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$ este operator liniar, atunci

$$A|\varphi\rangle\langle\psi| = |A\varphi\rangle\langle\psi| \qquad \text{şi} \qquad |\varphi\rangle\langle\psi|A = |\varphi\rangle\langle A^*\psi|.$$

9.5.3 Dacă $A : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$ este operator liniar, atunci

$$A = IAI = \sum_{j,k} |j\rangle\langle j|A|k\rangle\langle k| = \sum_{j,k} A_k^j\,|j\rangle\langle k|.$$

Numerele $A_k^j = \langle j|A|k\rangle$ sunt elementele matricei lui A în baza $\{|j\rangle\}$, adică

$$A = \begin{pmatrix} A_0^0 & \cdots & A_{d-1}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0^{d-1} & \cdots & A_{d-1}^{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|A|0\rangle & \cdots & \langle 0|A|d-1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle d-1|A|0\rangle & \cdots & \langle d-1|A|d-1\rangle \end{pmatrix}$$

şi

$$\operatorname{tr} A = \sum_k A_k^k = \sum_k \langle k|A|k\rangle.$$

Operatorul liniar

$$|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d : \ |\psi\rangle \mapsto |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|\psi\rangle,$$

corespunzător la două elemente $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}^d$, are urma

$$\operatorname{tr} |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| = \sum_k \langle k|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|k\rangle = \sum_k \varphi_1(k)\,\overline{\varphi_2(k)} = \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle,$$

adică avem

$$\mathrm{tr}\,|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| = \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle.$$

9.5.4 Dacă identificăm $\mathbb{C}^n$ cu spaţiul de funcţii

$$\{\varphi : \{0,1,...,n-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ \varphi \text{ este funcţie}\}$$

şi $\mathbb{C}^m$ cu spaţiul de funcţii

$$\{\psi : \{0,1,...,m-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ \psi \text{ este funcţie}\},$$

atunci produsul tensorial $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ poate fi privit ca fiind spaţiul de funcţii

$$\{\Psi : \{0,1,...,n-1\} \times \{0,1,...,m-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \ \Psi \text{ este funcţie}\}.$$

Printre elementele lui $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ se află funcţiile de forma

$$\Psi(j,k) = \varphi(j)\ \psi(k),$$

notate cu $\varphi \otimes \psi$, adică

$$(\varphi \otimes \psi)(j,k) = \varphi(j)\ \psi(k),$$

dar nu toate elementele lui $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ admit o astfel de descompunere.
Orice element $\Psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ este o sumă de elemente de forma $\varphi \otimes \psi$, adică

$$\Psi = \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j.$$

9.5.5 Oricare ar fi $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}^n$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}^m$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$ avem

$$((\alpha\varphi)\otimes\psi)(j,k) = \alpha\,\varphi(j)\,\psi(k) = \alpha\,(\varphi\otimes\psi)(j,k),$$
$$(\varphi\otimes(\alpha\psi))(j,k) = \alpha\,\varphi(j)\,\psi(k) = \alpha\,(\varphi\otimes\psi)(j,k),$$
$$((\varphi_1+\varphi_2)\otimes\psi)(j,k) = \varphi_1(j)\,\psi(k)+\varphi_2(j)\,\psi(k) = (\varphi_1\otimes\psi)(j,k)+(\varphi_2\otimes\psi)(j,k),$$
$$(\varphi\otimes(\psi_1+\psi_2))(j,k) = \varphi(j)\,\psi_1(k)+\varphi(j)\,\psi_2(k) = (\varphi\otimes\psi_1)(j,k)+(\varphi\otimes\psi_2)(j,k),$$

adică au loc relaţiile

$$(\alpha\varphi)\otimes\psi = \alpha\,(\varphi\otimes\psi) = \varphi\otimes(\alpha\psi),$$
$$(\varphi_1+\varphi_2)\otimes\psi = = \varphi_1\otimes\psi+\varphi_2\otimes\psi,$$
$$\varphi\otimes(\psi_1+\psi_2) = \varphi\otimes\psi_1+\varphi\otimes\psi_2.$$

9.5.6 Relaţia

$$\langle\varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2\rangle = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle\,\langle\psi_1, \psi_2\rangle,$$

extinsă utilizând aditivitatea, adică

$$\left\langle \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j, \sum_k \varphi_k \otimes \psi_k \right\rangle = \sum_{j,k} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \, \langle \psi_j, \psi_k \rangle$$

defineşte un produs scalar în $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$. Cele nm elemente de forma

$$|jk\rangle = |j\rangle \otimes |k\rangle$$

formează o bază ortonormată în $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, numită *baza computaţională*.

9.5.7 În $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, baza computaţională este $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

Stările Bell

$$\begin{aligned}
|ß_0\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \, (|00\rangle + |11\rangle), \\
|ß_1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \, (|10\rangle + |01\rangle), \\
|ß_2\rangle &= \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \, (|10\rangle - |01\rangle), \\
|ß_3\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \, (|00\rangle - |11\rangle)
\end{aligned}$$

formează o altă bază ortonormată cu proprietăţi remarcabile.

9.5.8 Fiecărui element $|\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ îi corespunde forma liniară

$$\langle \varphi_1| \otimes \langle \psi_1| : \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C},$$

definită prin

$$(\langle \varphi_1| \otimes \langle \psi_1|)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = \langle \varphi_1|\varphi\rangle \, \langle \psi_1|\psi\rangle.$$

Vom utiliza notaţia

$$\langle jk| = \langle j| \otimes \langle k|.$$

9.5.9 Baza computaţională $\{|jk\rangle\}$, fiind o bază ortonormată, au loc relaţiile

$$\sum_{i,j} |ij\rangle\langle ij| = I \qquad \text{şi} \qquad \langle ij|k\ell\rangle = \delta_{ik} \, \delta_{j\ell}.$$

Dacă $\varrho : \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ este un operator liniar, atunci

$$\varrho = I\varrho I = \sum_{i,j,k,\ell} |ij\rangle\langle ij|\varrho|k\ell\rangle\langle k\ell| = \sum_{i,j,k,\ell} \varrho_{k\ell}^{ij} \, |ij\rangle\langle k\ell|,$$

unde $\varrho_{k\ell}^{ij} = \langle ij|\varrho|k\ell\rangle$ sunt elementele matricei lui ϱ în raport cu baza $\{|jk\rangle\}$.

9.5.10 Matricea unui operator liniar $\varrho:\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ în raport cu baza computaţională $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ ordonată lexicografic este

$$\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_{00}^{00} & \varrho_{01}^{00} & \varrho_{10}^{00} & \varrho_{11}^{00} \\ \varrho_{00}^{01} & \varrho_{01}^{01} & \varrho_{10}^{01} & \varrho_{11}^{01} \\ \varrho_{00}^{10} & \varrho_{01}^{10} & \varrho_{10}^{10} & \varrho_{11}^{10} \\ \varrho_{00}^{11} & \varrho_{01}^{11} & \varrho_{10}^{11} & \varrho_{11}^{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle 00|\varrho|00\rangle & \langle 00|\varrho|01\rangle & \langle 00|\varrho|10\rangle & \langle 00|\varrho|11\rangle \\ \langle 01|\varrho|00\rangle & \langle 01|\varrho|01\rangle & \langle 01|\varrho|10\rangle & \langle 01|\varrho|11\rangle \\ \langle 10|\varrho|00\rangle & \langle 10|\varrho|01\rangle & \langle 10|\varrho|10\rangle & \langle 10|\varrho|11\rangle \\ \langle 11|\varrho|00\rangle & \langle 11|\varrho|01\rangle & \langle 11|\varrho|10\rangle & \langle 11|\varrho|11\rangle \end{pmatrix},$$

urmele ei parţiale sunt matricele

$$\mathrm{tr}_1\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_{00}^{00} & \varrho_{01}^{00} \\ \varrho_{00}^{01} & \varrho_{01}^{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varrho_{10}^{10} & \varrho_{11}^{10} \\ \varrho_{10}^{11} & \varrho_{11}^{11} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{tr}_2\varrho = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \varrho_{00}^{00} & \varrho_{01}^{00} \\ \varrho_{00}^{01} & \varrho_{01}^{01} \end{pmatrix} & \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \varrho_{10}^{00} & \varrho_{11}^{00} \\ \varrho_{10}^{01} & \varrho_{11}^{01} \end{pmatrix} \\ \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \varrho_{00}^{10} & \varrho_{01}^{10} \\ \varrho_{00}^{11} & \varrho_{01}^{11} \end{pmatrix} & \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \varrho_{10}^{10} & \varrho_{11}^{10} \\ \varrho_{10}^{11} & \varrho_{11}^{11} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

şi

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{tr}_1\varrho) = \mathrm{tr}\,\varrho = \mathrm{tr}\,(\mathrm{tr}_2\varrho).$$

9.5.11 *Produsul tensorial a doi operatori*

$$A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n \quad \text{şi} \quad B:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$$

este operatorul

$$A\otimes B : \mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m,$$

definit prin relaţia

$$(A\otimes B)(\varphi\otimes\psi) = (A\varphi)\otimes(B\psi)$$

şi extins folosind aditivitatea, adică

$$(A\otimes B)\sum_j \varphi_j\otimes\psi_j = \sum_j (A\varphi_j)\otimes(B\psi_j).$$

9.5.12 Exemple. Avem

$$(\sigma_1\otimes\sigma_2)|10\rangle = (\sigma_1|1\rangle)\otimes(\sigma_2|0\rangle) = \mathrm{i}\,|01\rangle,$$
$$(\sigma_1\otimes\sigma_2)(|10\rangle+|01\rangle)=(\sigma_1\otimes\sigma_2)|10\rangle+(\sigma_1\otimes\sigma_2)|01\rangle=\mathrm{i}\,|01\rangle-\mathrm{i}\,|10\rangle,$$
$$(|i\rangle\langle j|\otimes|k\rangle\langle\ell|)\,(|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle) = \langle j|\varphi\rangle\,\langle\ell|\psi\rangle\,|i\rangle\otimes|k\rangle = \varphi(j)\,\psi(\ell)\,|ik\rangle.$$

9.5.13 Din relaţiile

$$(|\varphi_1\rangle\otimes|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\otimes\langle\psi_2|)(|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle) = \langle\varphi_2|\varphi\rangle\,\langle\psi_2|\psi\rangle\,|\varphi_1\rangle\otimes|\psi_1\rangle,$$
$$(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|\otimes|\psi_1\rangle\langle\psi_2|)(|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle) = \langle\varphi_2|\varphi\rangle\,\langle\psi_2|\psi\rangle\,|\varphi_1\rangle\otimes|\psi_1\rangle$$

rezultă că

$$|\varphi_1\rangle\otimes|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\otimes\langle\psi_2| = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|\otimes|\psi_1\rangle\langle\psi_2|,$$

şi prin urmare

$$\mathrm{tr}_1(|\varphi_1\rangle\otimes|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\otimes\langle\psi_2|) = \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle\;|\psi_1\rangle\langle\psi_2|,$$
$$\mathrm{tr}_2(|\varphi_1\rangle\otimes|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\otimes\langle\psi_2|) = \langle\psi_2|\psi_1\rangle\;|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|.$$

În particular, avem

$$|ij\rangle\langle k\ell| = |i\rangle\langle k|\otimes|j\rangle\langle\ell| \qquad \text{şi} \qquad \begin{array}{l}\mathrm{tr}_1\,|ij\rangle\langle k\ell| = \delta_{ik}\,|j\rangle\langle\ell|,\\ \mathrm{tr}_2\,|ij\rangle\langle k\ell| = \delta_{j\ell}\,|i\rangle\langle k|.\end{array}$$

9.5.14 Dacă $A, B : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ au în raport cu baza $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 \\ a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_0^0 & b_1^0 \\ b_0^1 & b_1^1 \end{pmatrix},$$

atunci operatorul $A\otimes B : \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ are matricea

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_0^0 B & a_1^0 B \\ a_0^1 B & a_1^1 B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^0b_0^0 & a_0^0b_1^0 & a_1^0b_0^0 & a_1^0b_1^0 \\ a_0^0b_0^1 & a_0^0b_1^1 & a_1^0b_0^1 & a_1^0b_1^1 \\ a_0^1b_0^0 & a_0^1b_1^0 & a_1^1b_0^0 & a_1^1b_1^0 \\ a_0^1b_0^1 & a_0^1b_1^1 & a_1^1b_0^1 & a_1^1b_1^1 \end{pmatrix}$$

şi

$$\mathrm{tr}_1(A\otimes B) = \begin{pmatrix} a_0^0b_0^0 & a_0^0b_1^0 \\ a_0^0b_0^1 & a_0^0b_1^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1b_0^0 & a_1^1b_1^0 \\ a_1^1b_0^1 & a_1^1b_1^1 \end{pmatrix} = (\mathrm{tr}\,A)\,B,$$

$$\mathrm{tr}_2(A\otimes B)=\begin{pmatrix} \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_0^0b_0^0 & a_0^0b_1^0 \\ a_0^0b_0^1 & a_0^0b_1^1 \end{pmatrix} & \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_1^0b_0^0 & a_1^0b_1^0 \\ a_1^0b_0^1 & a_1^0b_1^1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_0^1b_0^0 & a_0^1b_1^0 \\ a_0^1b_0^1 & a_0^1b_1^1 \end{pmatrix} & \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_1^1b_0^0 & a_1^1b_1^0 \\ a_1^1b_0^1 & a_1^1b_1^1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=(\mathrm{tr}\,B)\,A.$$

În particular, din ultimele două relaţii rezultă că

$$\mathrm{tr}_2(A\otimes B)\otimes \mathrm{tr}_1(A\otimes B)=\mathrm{tr}\,(A\otimes B)\,A\otimes B.$$

9.5.15 În cazul unui operator liniar

$$T:\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m,$$

o conditie necesară pentru a exista operatorii liniari

$$\begin{matrix} A:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n \\ B:\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^m \end{matrix} \qquad \text{astfel încât} \qquad T=A\otimes B$$

este ca

$$(\mathrm{tr}_2\,T)\otimes(\mathrm{tr}_1\,T)=(\mathrm{tr}\,T)\,T.$$

9.5.16 Un sistem compus din două subsisteme cuantice **A** şi **B**, descrise de spaţiile Hilbert $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{C}^m$, este descris de spaţiul Hilbert $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m$.
Orice operator liniar $A:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$ referitor la sistemul cuantic **A** devine un operator liniar referitor la sistemul compus **A**&**B** prin identificarea cu $A\otimes I_m$. Similar, orice operator $B:\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^m$ referitor la sistemul cuantic **B** devine un operator referitor la sistemul compus **A**&**B** prin identificarea cu $I_n\otimes B$.

9.5.17 O stare pură $|\Psi\rangle\in\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m$ a sistemului compus este numită *stare separabilă* (*unentangled state*, în engleză) dacă există stările pure $|\varphi\rangle\in\mathbb{C}^n$ şi $|\psi\rangle\in\mathbb{C}^m$ astfel încât

$$|\Psi\rangle=|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle.$$

În caz contrar, $|\Psi\rangle$ este numită *stare neseparabilă* (*entangled state*, în engleză).

9.5.18 Starea $|\Psi\rangle=\frac{1}{2}(|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle)\in\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ este separabilă deoarece

$$|\Psi\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\ \otimes\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle).$$

Stările Bell sunt neseparabile. Pentru ca ß$_0$ să fie separabilă, adică

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle)$$

ar trebui ca α, β, α', β' să verifice relaţiile contradictorii

$$\alpha\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \beta\beta' \qquad \text{şi} \qquad \alpha\beta' = 0 = \beta\alpha'.$$

9.5.19 Alegând o bază $\{|\varphi_i\rangle\}$ în $\mathbb{C}^n$ şi o bază $\{|\psi_j\rangle\}$ în $\mathbb{C}^m$, o stare pură $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ se poate reprezenta sub forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Psi^{ij} \, |\varphi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle.$$

Numărul

$$r = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \Psi^{00} & \dots & \Psi^{0m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi^{n-10} & \dots & \Psi^{n-1m-1} \end{pmatrix}$$

nu depinde de bazele alese şi este numit *rangul Schmidt* al lui $|\Psi\rangle$. El este 1 dacă şi numai dacă $|\Psi\rangle$ este separabilă. Dacă $|\Psi\rangle$ este neseparabilă, rangul Schmidt poate fi considerat ca o măsură a gradului de inseparabilitate.
În cazul starii Bell $|ß_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, rangul Schmidt este

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2.$$

9.5.20 Valorile medii a două observabile $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ şi $B : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ în starea pură separabilă $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ sunt

$$\begin{aligned} \langle A\rangle &= \langle\varphi| \otimes \langle\psi| A \otimes I_m |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \langle\varphi|A|\varphi\rangle = \operatorname{tr}\left(A|\varphi\rangle\langle\varphi|\right), \\ \langle B\rangle &= \langle\varphi| \otimes \langle\psi| I_n \otimes B |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle = \operatorname{tr}\left(B|\psi\rangle\langle\psi|\right). \end{aligned} \tag{9.4}$$

Se observă că $\langle A\rangle$ nu depinde de $|\psi\rangle$, iar $\langle B\rangle$ nu depinde de $|\varphi\rangle$.
Operatorul densitate corespunzător stării pure separabile $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ este

$$\varrho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle\langle\varphi| \otimes \langle\psi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Deoarece $\operatorname{tr}_2 \varrho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ şi $\operatorname{tr}_1 \varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ avem

$$\varrho = (\operatorname{tr}_2 \varrho) \otimes (\operatorname{tr}_1 \varrho),$$

iar relaţiile (9.4) se pot scrie sub forma

$$\langle A\rangle = \mathrm{tr}\,(A\,\mathrm{tr}_2\varrho) \qquad \text{şi} \qquad \langle B\rangle = \mathrm{tr}\,(B\,\mathrm{tr}_1\varrho).$$

9.5.21 Oricare ar fi operatorul densitate $\varrho:\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m$ şi oricare ar fi operatorii autoadjuncţi $A:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ şi $B:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$, avem

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,((A\otimes I_m)\varrho) &= \sum_{i,j}\sum_{k,\ell}(A\otimes I_m)^{ij}_{k\ell}\,\varrho^{k\ell}_{ij} = \sum_{i,j}\sum_{k,\ell} A^i_k\,\delta^j_\ell\,\varrho^{k\ell}_{ij}\\ &= \sum_{i,k} A^i_k\,(\mathrm{tr}_2\varrho)^k_i = \mathrm{tr}\,(A\,\mathrm{tr}_2\varrho),\\ \mathrm{tr}\,((I_n\otimes B)\varrho) &= \sum_{i,j}\sum_{k,\ell}(I_n\otimes B)^{ij}_{k\ell}\,\varrho^{k\ell}_{ij} = \sum_{i,j}\sum_{k,\ell}\delta^i_k\,B^j_\ell\,\varrho^{k\ell}_{ij}\\ &= \sum_{j,\ell} B^j_\ell\,(\mathrm{tr}_1\varrho)^\ell_j = \mathrm{tr}\,(B\,\mathrm{tr}_1\varrho),\end{aligned}$$

adică au loc relaţiile

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\,((A\otimes I_m)\varrho) = \mathrm{tr}\,(A\,\mathrm{tr}_2\varrho),\\ &\mathrm{tr}\,((I_n\otimes B)\varrho) = \mathrm{tr}\,(B\,\mathrm{tr}_1\varrho),\end{aligned} \qquad \text{oricare ar fi} \qquad \begin{aligned}&A:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n,\\ &B:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m.\end{aligned} \tag{9.5}$$

Astfel, dacă sistemul compus $\mathbf{A}\&\mathbf{B}$ este în starea ϱ (pură sau mixtă), atunci statistica măsurătorilor efectuate asupra sistemului $\mathbf{A}$ se poate descrie folosind *operatorul densitate redus* $\varrho^{\mathbf{A}} = \mathrm{tr}_2\varrho$, iar statistica măsurătorilor efectuate asupra sistemului $\mathbf{B}$ folosind *operatorul densitate redus* $\varrho^{\mathbf{B}} = \mathrm{tr}_1\varrho$.
Operatorii densitate reduşi

$$\mathrm{tr}_2\varrho:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \qquad \text{şi} \qquad \mathrm{tr}_1\varrho:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

sunt (v. pag. 189-**9**) singurii operatori liniari care satisfac relaţiile (9.5).

9.5.22 Dacă $|\varphi_a\rangle$ şi $|\psi_b\rangle$ sunt vectori proprii ai operatorilor $A:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ şi $B:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ corespunzători valorilor proprii a şi b, adică

$$A|\varphi_a\rangle = a\,|\varphi_a\rangle, \qquad\qquad B|\psi_b\rangle = b\,|\psi_b\rangle,$$

atunci $|\varphi_a\rangle\otimes|\psi_b\rangle$ este un vector propriu al operatorului $A\otimes B$ corespunzător valorii proprii ab, adică

$$(A\otimes B)(|\varphi_a\rangle\otimes|\psi_b\rangle) = ab\,(|\varphi_a\rangle\otimes|\psi_b\rangle).$$

În particular, avem

$$\begin{aligned}&(A\otimes I_m)(|\varphi_a\rangle\otimes|\psi\rangle) = a\,(|\varphi_a\rangle\otimes|\psi\rangle), \qquad \text{oricare ar fi} \quad |\psi\rangle\in\mathbb{C}^m,\\ &(I_n\otimes B)(|\varphi\rangle\otimes|\psi_b\rangle) = b\,(|\varphi\rangle\otimes|\psi_b\rangle), \qquad \text{oricare ar fi} \quad |\varphi\rangle\in\mathbb{C}^n.\end{aligned}$$

Dacă descompunerile spectrale ale observabilelor A şi B sunt

$$A=\sum_a a\,P_a^A \qquad \text{şi} \qquad B=\sum_b b\,P_b^B,$$

atunci observabilele $A\otimes I_m$ şi $I_n\otimes B$ au descompunerile

$$A\otimes I_m=\sum_a a\,P_a^A\otimes I_m \qquad \text{şi} \qquad I_n\otimes B=\sum_b b\,I_n\otimes P_b^B.$$

Măsurând $A\otimes I_m$ în starea ϱ, rezultatul a se obţine cu probabilitatea

$$p(a)=\mathrm{tr}\,((P_a^A\otimes I_m)\varrho)=\mathrm{tr}\,(P_a^A\,\mathrm{tr}_2\varrho),$$

adică egală cu probabilitatea obţinerii rezultatului a în cazul măsurării observabilei A în starea $\mathrm{tr}_2\varrho$. Valoarea medie a observabilei $A\otimes I_m$ în starea ϱ este egală cu valoarea medie a observabilei A în starea $\mathrm{tr}_2\varrho$ (v. pag. 314-**21**)

$$\mathrm{tr}\,((A\otimes I_m)\varrho)=\mathrm{tr}\,(A\,\mathrm{tr}_2\varrho).$$

Similar, măsurând $I_n\otimes B$ în starea ϱ, obţinem rezultatul b cu probabilitatea

$$p(b)=\mathrm{tr}\,((I_n\otimes P_b^B)\varrho)=\mathrm{tr}\,(P_b^B\,\mathrm{tr}_1\varrho),$$

adică egală cu probabilitatea obţinerii rezultatului b în cazul măsurării observabilei B în starea $\mathrm{tr}_1\varrho$. Valoarea medie a observabilei $I_n\otimes B$ în starea ϱ este egală cu valoarea medie a observabilei B în starea $\mathrm{tr}_1\varrho$ (v. pag. 314-**21**)

$$\mathrm{tr}\,((I_n\otimes B)\varrho)=\mathrm{tr}\,(B\,\mathrm{tr}_1\varrho).$$

9.5.23 Starea Bell $|ß_0\rangle$ este neseparabilă. Operatorul densitate corespunzător, adică

$$\varrho:\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2,\quad \varrho=|ß_0\rangle\langle ß_0|=\tfrac{1}{2}\,(|00\rangle\langle 00|+|11\rangle\langle 11|+|00\rangle\langle 00|+|11\rangle\langle 11|)$$

cu matricea

$$\varrho=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

nu este produsul tensorial a doi operatori deoarece (v. pag. 312-**15**)

$$\varrho^{\mathbf{A}}=\mathrm{tr}_2\varrho=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad \varrho^{\mathbf{B}}=\mathrm{tr}_1\varrho=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

şi

$$(\mathrm{tr}_2\varrho)\otimes(\mathrm{tr}_1\varrho)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\neq(\mathrm{tr}\,\varrho)\,\varrho.$$

Starea Bell $|ß_0\rangle$ nu este un produs tensorial de stări pure, dar nici operatorul densitate corespunzător $\varrho=|ß_0\rangle\langle ß_0|$ nu este un produs tensorial de operatori densitate. Ştim însă că valorile medii $\langle A\rangle$ şi $\langle B\rangle$ a două observabile $A\otimes I_2$ şi $I_2\otimes B$ în starea Bell $\varrho=|ß_0\rangle\langle ß_0|$ se pot exprima sub forma (v. pag. 314-**21**)

$$\langle A\rangle=\mathrm{tr}\,(A\,\mathrm{tr}_2\varrho)\qquad\text{şi}\qquad\langle B\rangle=\mathrm{tr}\,(B\,\mathrm{tr}_1\varrho).$$

Deoarece $\mathrm{tr}\,(\varrho^{\mathbf{A}})^2=\mathrm{tr}\,(\varrho^{\mathbf{B}})^2=\frac{1}{2}<1$, operatorii $\varrho^{\mathbf{A}}$ şi $\varrho^{\mathbf{B}}$ nu descriu stări pure. Gradul de impuritate al stărilor $\varrho^{\mathbf{A}}$ şi $\varrho^{\mathbf{B}}$ este maxim (v. pag. 287-**6**).
În cazul în care sistemul compus este în starea pură neseparabilă $|ß_0\rangle$, informaţia pe care o avem despre sistemul compus reprezintă maximul posibil. În acelaşi timp, informaţia referitoare la fiecare dintre subsistemele componente reprezintă minimul posibil.

9.5.24 Starea *singlet*

$$|ß_2\rangle=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(|10\rangle-|01\rangle)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(|1\rangle\otimes|0\rangle-|0\rangle\otimes|1\rangle)$$

are proprietatea remarcabilă de a-şi păstra, până la un factor de fază, forma în urma trecerii la oricare altă bază ortonormată $\{|0'\rangle,|1'\rangle\}$. Scriind

$$|0'\rangle=a\,|0\rangle+b\,|1\rangle,$$
$$|1'\rangle=c\,|0\rangle+d\,|1\rangle$$

matricea de trecere

$$U=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$$

este unitară, şi prin urmare,

$$|ad-bc|=\sqrt{\det U\ \det U^*}=\sqrt{\det(UU^*)}=\sqrt{\det I_2}=1.$$

Deoarece elementul

$$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(|1'\rangle\otimes|0'\rangle-|0'\rangle\otimes|1'\rangle)=(ad-bc)\,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(|1\rangle\otimes|0\rangle-|0\rangle\otimes|1\rangle)$$

din $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ diferă de $|ß_2\rangle$ doar prin factorul $(ad-bc)$ cu $|ad-bc|=1$, ambii descriu aceeaşi stare. Pentru $|ß_2\rangle$ se obţine descompunerea Schmidt

$$|ß_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_0\rangle\otimes|\psi_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle\otimes|\psi_1\rangle$$

alegând bazele ortonormate:

$\{|\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle), |\varphi_1\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\}$ pentru primul sistem,

$\{|\psi_0\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle), |\psi_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\}$ pentru al doilea sistem.

În particular, se observă că rangul Schmidt al lui $|ß_2\rangle$ este $r=2$, adică gradul de inseparabilitate al stării $|ß_2\rangle$ este maxim.

9.5.25 Dacă $\varrho^{\mathbf{A}}:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$ şi $\varrho^{\mathbf{B}}:\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^m$ sunt operatori densitate, atunci

$$\varrho^{\mathbf{A}}\otimes\varrho^{\mathbf{B}}:\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m$$

este operator densitate şi

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \mathrm{tr}_2(\varrho^{\mathbf{A}}\otimes\varrho^{\mathbf{B}}), \qquad \varrho^{\mathbf{B}} = \mathrm{tr}_1(\varrho^{\mathbf{A}}\otimes\varrho^{\mathbf{B}}).$$

Dacă sistemul compus $\mathbf{A}\&\mathbf{B}$ se află în starea $\varrho^{\mathbf{A}}\otimes\varrho^{\mathbf{B}}$, atunci oricare ar fi observabilele $A:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$ şi $B:\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^m$, avem

$$\langle A\rangle = \mathrm{tr}\,((A\otimes I_m)(\varrho^{\mathbf{A}}\otimes\varrho^{\mathbf{B}})) = \mathrm{tr}\,(A\varrho^{\mathbf{A}})$$
$$\langle B\rangle = \mathrm{tr}\,((I_n\otimes B)(\varrho^{\mathbf{A}}\otimes\varrho^{\mathbf{B}})) = \mathrm{tr}\,(B\varrho^{\mathbf{B}}).$$

În particular, $\langle A\rangle$ nu depinde de $\varrho^{\mathbf{B}}$, şi $\langle B\rangle$ nu depinde de $\varrho^{\mathbf{A}}$.

9.5.26 Dacă $\varrho_1^{\mathbf{A}}, \varrho_2^{\mathbf{A}}, ..., \varrho_k^{\mathbf{A}}:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$ şi $\varrho_1^{\mathbf{B}}, \varrho_2^{\mathbf{B}}, ..., \varrho_k^{\mathbf{B}}:\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^m$ sunt operatori densitate şi $p_1, p_2, ..., p_k$ este o distribuţie de probabilitate, adică

$$p_1, p_2, ..., p_k\in[0,1] \qquad \text{şi} \qquad \sum_{j=1}^{k} p_j = 1,$$

atunci

$$\varrho = \sum_{j=1}^{k} p_j\varrho_j^{\mathbf{A}}\otimes\varrho_j^{\mathbf{B}}$$

este operator densitate şi

$$\mathrm{tr}_2\varrho = \sum_{j=1}^{k} p_j\varrho_j^{\mathbf{A}}, \qquad \mathrm{tr}_1\varrho = \sum_{j=1}^{k} p_j\varrho_j^{\mathbf{B}}.$$

Dacă sistemul compus $\mathbf{A}\&\mathbf{B}$ se află în starea ϱ, atunci oricare ar fi observabilele $A:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ şi $B:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$, avem

$$\langle A\rangle = \mathrm{tr}\,(A\,\mathrm{tr}_2\,\varrho) \qquad \text{şi} \qquad \langle B\rangle = \mathrm{tr}\,(B\,\mathrm{tr}_1\varrho),$$

adică $\langle A\rangle$ nu depinde de $\varrho_1^{\mathbf{B}}$, $\varrho_2^{\mathbf{B}}, ...,$ $\varrho_k^{\mathbf{B}}$, şi $\langle B\rangle$ nu depinde de $\varrho_1^{\mathbf{A}}$, $\varrho_2^{\mathbf{A}}, ...,$ $\varrho_k^{\mathbf{A}}$.

9.5.27 O stare mixtă $\varrho:\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m$ a sistemului compus $\mathbf{A}\&\mathbf{B}$ este numită *stare separabilă* (*unentangled state*, în engleză) dacă există operatorii densitate

$$\varrho_1^{\mathbf{A}},\ \varrho_2^{\mathbf{A}}, ...,\ \varrho_k^{\mathbf{A}}:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \qquad \varrho_1^{\mathbf{B}},\ \varrho_2^{\mathbf{B}}, ...,\ \varrho_k^{\mathbf{B}}:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

şi o distribuţie de probabilitate $p_1,\ p_2, ...,\ p_k$ astfel încât

$$\varrho = \sum_{j=1}^{k} p_j\,\varrho_j^{\mathbf{A}}\otimes\varrho_j^{\mathbf{B}}.$$

În caz contrar, ϱ este numită *stare neseparabilă* (*entangled state*, în engleză).

9.5.28 Alegând o bază $\{|\varphi_i\rangle\}$ în $\mathbb{C}^n$ şi o bază $\{|\psi_j\rangle\}$ în $\mathbb{C}^m$, o stare pură $|\Psi\rangle$ a sistemului compus se poate reprezenta sub forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \Psi^{ij}\,|\varphi_i\rangle\otimes|\psi_j\rangle.$$

Conform teoremei de descompunere a lui Schmidt (v. pag. 191-**16**), bazele $\{|\varphi_i\rangle\}$ şi $\{|\psi_j\rangle\}$ se pot alege astfel încât să obţinem descompunerea

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{r-1} \Psi^{ii}\,|\varphi_i\rangle\otimes|\psi_i\rangle \qquad \text{cu} \qquad \Psi^{ii}\in(0,\infty).$$

Dacă sistemul compus este în starea pură $|\Psi\rangle$, atunci operatorii densitate care descriu stările celor două subsisteme

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \mathrm{tr}_2\,|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i=0}^{r-1}(\Psi^{ii})^2\,|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|,$$
$$\varrho^{\mathbf{B}} = \mathrm{tr}_1\,|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i=0}^{r-1}(\Psi^{ii})^2\,|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

au aceleaşi valori proprii nenule şi anume $(\Psi^{00})^2$, $(\Psi^{11})^2$, ... , $(\Psi^{r-1r-1})^2$. Entropiile von Neumann ale stărilor celor două subsisteme sunt egale

$$S[\varrho^{\mathbf{A}}] = S[\varrho^{\mathbf{A}}] = \sum_{i=0}^{r-1}(\Psi^{ii})^2\,\ln(\Psi^{ii})^2$$

şi ele reprezintă o măsură a gradului de inseparabilitate a stării $|\Psi\rangle$.

9.5.29 * *Orice stare poate fi purificată* în sensul următor: oricare ar fi operatorul densitate $\varrho^{\mathbf{A}}:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ există o stare pură $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ astfel încât

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \mathrm{tr}_2 |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

Există $p_j \in [0,1]$ cu $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ şi o bază ortonormată $\{|\varphi_j\rangle\}$ în $\mathbb{C}^n$ astfel încât

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|.$$

Alegând în $\mathbb{C}^n$ o bază ortonormată arbitrară $\{|\psi_j\rangle\}$ şi

$$|\Psi\rangle = \sum_j \sqrt{p_j}\, |\varphi_j\rangle \otimes |\psi_j\rangle$$

obţinem

$$\mathrm{tr}_2 |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathrm{tr}_2 \sum_{j,k} \sqrt{p_j p_k}\, |\varphi_j\rangle \otimes |\psi_j\rangle\langle\varphi_k| \otimes \langle\psi_k| = \sum_{j=1}^n p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \varrho^{\mathbf{A}}.$$

9.5.30 Dacă subsistemele **A** şi **B** ale unui sistem compus se află la distanţă unul faţă de celălalt, singurele măsurători realizabile experimental sunt cele locale, adică referitoare fie la **A**, fie la **B**. Astfel operatorii implicaţi sunt de forma $A \otimes I_m$ sau $I_n \otimes B$. Plecând de la descompunerea spectrală

$$\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

a observabilei σ_3 obţinem că $\sigma_3 \otimes I_2$ are descompunerea spectrală

$$\sigma_3 \otimes I_2 = |0\rangle\langle 0| \otimes I_2 - |1\rangle\langle 1| \otimes I_2.$$

În cazul unui sistem compus din doi qubiţi, aflat în starea neseparabilă $|ß_2\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$, măsurând observabila $\sigma_3 \otimes I_2$ se pot obţine:

- rezultatul 1 cu probabilitatea

$$p(1) = \langle ß_2 | (|0\rangle\langle 0| \otimes I_2) | ß_2 \rangle = \frac{1}{2},$$

- rezultatul -1 cu probabilitatea

$$p(-1) = \langle ß_2 | (|1\rangle\langle 1| \otimes I_2) | ß_2 \rangle = \frac{1}{2}.$$

După măsurătoare starea sistemului compus este starea separabilă

$$\frac{(|0\rangle\langle 0| \otimes I_2)|ß_2\rangle}{\sqrt{p(1)}} = -\mathrm{i}\,|01\rangle$$

în cazul obţinerii rezultatului 1 şi starea separabilă

$$\frac{(|1\rangle\langle 1|\otimes I_2)|ß_2\rangle}{\sqrt{p(-1)}} = \mathrm{i}\,|10\rangle$$

în cazul obţinerii rezultatului -1.
Admitem că primul qubit se află la dispoziţia lui Alice şi al doilea la dispoziţia lui Bob, situaţi la distanţă unul faţă de celălalt. Dacă Alice măsoară observabila σ_3 şi obţine rezultatul 1, atunci ea ştie că după măsurătoare qubitul ei se află în starea $|0\rangle$, iar al lui Bob în starea $|1\rangle$. Dacă obţine rezultatul -1, atunci ea ştie că după măsurătoare qubitul ei se află în starea $|1\rangle$, iar al lui Bob în starea $|0\rangle$. Astfel, Alice poate să prevadă cu precizie ce rezultat va obţine Bob măsurând σ_3.

9.5.31 Stările Bell verifică relaţiile

$$|ß_0\rangle = (\sigma_0\otimes I)|ß_0\rangle, \qquad |ß_1\rangle = (\sigma_1\otimes I)|ß_0\rangle,$$
$$|ß_2\rangle = (\sigma_2\otimes I)|ß_0\rangle, \qquad |ß_3\rangle = (\sigma_3\otimes I)|ß_0\rangle$$

9.5.32 *Codificarea superdensă.* Primind un sistem clasic cu doar două stări posibile, 0 şi 1, putem deduce dacă starea lui este 0 sau 1, adică obţinem un bit de informaţie. Primind un sistem cuantic cu spaţiu Hilbert bidimensional (qubit), în general, prin măsurători nu putem extrage mai multă informaţie decât în cazul clasic (v. pag. 301-**18** şi pag. 306-**12**). În situaţii speciale însă, se poate transmite cu ajutorul unui qubit echivalentul a doi biţi.
Considerăm un sistem cuantic compus din doi qubiţi aflat în starea Bell $ß_0$ cu qubiţii **A** şi **B** la distanţă unul faţă de celălalt. Admitem că Alice are la dispoziţie qubitul **A**, iar Bob qubitul **B** şi că Alice doreşte să-i transmită lui Bob unul dintre mesajele 00, 01, 10 , 11, sau echivalent, mesajul k, unde k este unul dintre numerele 0, 1, 2, 3. Alice aplică qubitului avut la dispoziţie transformarea σ_k şi apoi îl trimite lui Bob. Având la dispoziţie ambii qubiţi, Bob măsoară observabila

$$O = 0\,|ß_0\rangle\langle ß_0| + 1\,|ß_1\rangle\langle ß_1| + 2\,|ß_2\rangle\langle ß_2| + 3\,|ß_3\rangle\langle ß_3|$$

şi obţine rezultatul k. Acest lucru se întâmplă deoarece în urma transformării σ_k aplicate de Alice qubitului **A**, starea sistemului compus **A**&**B** a devenit

$$(\sigma_k\otimes I)|ß_0\rangle = |ß_k\rangle.$$

9.5.33 Oricare ar fi $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathbb{C}^2$, avem

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} |ß_k\rangle \otimes \sigma_k|\psi\rangle &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) \otimes \left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) \\ &+ \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(|10\rangle + |01\rangle\right) \otimes \left(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle\right) \\ &+ \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{i}|10\rangle - \mathrm{i}|01\rangle\right) \otimes \left(\mathrm{i}\alpha|1\rangle - \mathrm{i}\beta|0\rangle\right) \\ &+ \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right) \otimes \left(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle\right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle\right) \\ &= |\psi\rangle \otimes |ß_0\rangle.\end{aligned}$$

Relaţia obţinută, referitoare la un sistem compus din trei qubiţi, permite transmiterea la distanţă a stării necunoscute $|\psi\rangle$.

9.5.34 *Teleportarea unei stări cuantice necunoscute.* Admitem că Alice şi Bob, aflaţi la distanţă unul faţă de celălalt, au la dispoziţie câte un qubit al unui sistem compus din doi qubiţi aflat în starea $|ß_0\rangle$. Mai admitem că Alice mai are la dispoziţie un alt qubit aflat în starea necunoscută $|\psi\rangle$ pe care doreşte să o transfere qubitului aflat la dispoziţia lui Bob. Astfel, sistemul compus format din cei trei qubiţi se află în starea $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |ß_0\rangle$ care se mai poate scrie

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|ß_0\rangle \otimes \sigma_0|\psi\rangle + |ß_1\rangle \otimes \sigma_1|\psi\rangle + |ß_2\rangle \otimes \sigma_2|\psi\rangle + |ß_3\rangle \otimes \sigma_3|\psi\rangle\right).$$

Alice efectuează asupra sistemului de doi qubiţi avut la dispoziţie măsurătoarea observabilei

$$O = 0\,|ß_0\rangle\langle ß_0| + 1\,|ß_1\rangle\langle ß_1| + 2\,|ß_2\rangle\langle ß_2| + 3\,|ß_3\rangle\langle ß_3|$$

lucru echivalent cu măsurarea în cazul sistemului de trei qubiţi a observabilei

$$O \otimes I_2 = 0\,|ß_0\rangle\langle ß_0| \otimes I_2 + 1\,|ß_1\rangle\langle ß_1| \otimes I_2 + 2\,|ß_2\rangle\langle ß_2| \otimes I_2 + 3\,|ß_3\rangle\langle ß_3| \otimes I_2.$$

Rezultatele posibile sunt 0,1,2,3. Rezultatul k se obţine cu probabilitatea

$$p(k) = \langle\Psi|(|ß_k\rangle\langle ß_k| \otimes I_2)|\Psi\rangle = \frac{1}{4},$$

iar în cazul obţinerii lui, starea sistemului devine

$$\frac{(|ß_k\rangle\langle ß_k| \otimes I_2)|\Psi\rangle}{\sqrt{p(k)}} = |ß_k\rangle \otimes \sigma_k|\psi\rangle,$$

adică qubitul aflat la dispoziţia lui Bob trece în starea $\sigma_k|\psi\rangle$. Admitem că Alice poate să-l informeze pe Bob că a obţinut rezultatul k folosind o cale de

comunicare clasică. Bob va aplica transformarea σ_k qubitului avut la dispoziţie făcând ca starea acestuia să devină

.

$$\sigma_k^2|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

Starea necunoscută $|\psi\rangle$ a fost astfel teleportată de la Alice la Bob.

9.5.35 *Inegalitatea lui Bell.* Într-un laborator **C** se prepară sisteme formate din câte două particule. După prepararea fiecărei perechi, una dintre particule este trimisă lui Alice şi cealaltă lui Bob. Alice are la dispoziţie două dispozitive care-i permit să măsoare două mărimi fizice A_1 şi A_2, putând obţine rezultatul $a_1 \in \{-1, 1\}$ şi respectiv $a_2 \in \{-1, 1\}$. Similar, Bob poate măsura mărimile fizice B_1 şi B_2, putând obţine rezultatul $b_1 \in \{-1, 1\}$ şi $b_2 \in \{-1, 1\}$. În cazul fiecărei particule primite Alice măsoară una dintre mărimile A_1, A_2, alesă la întâmplare, iar Bob una dintre mărimile B_1, B_2 alesă tot la întâmplare. Admitem că Alice şi Bob se află la distanţă unul faţă de celălalt şi că în cazul fiecărei perechi de particule, măsurătoarea se efectuează simultan astfel că rezultatele obţinute nu se influenţează unul pe celălalt. Mai admitem că pentru fiecare pereche de particule preparată în laboratorul **C**, mărimile A_1, A_2, B_1, B_2 au valori bine determinate a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \{-1, 1\}$. După efectuarea unui mare număr de măsurători, Alice şi Bob se întâlnesc şi calculează valorile medii $\mathbf{E}(A_1B_1)$, $\mathbf{E}(A_1B_2)$, $\mathbf{E}(A_2B_1)$, $\mathbf{E}(A_2B_2)$ ale produselor de mărimi A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2. Deoarece a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \{-1, 1\}$, avem fie $(a_1+a_2)b_1 = 0$, fie $(a_2-a_1)b_2 = 0$, şi prin urmare

$$a_1b_1+a_2b_1+a_2b_2-a_1b_2 = (a_1+a_2)b_1 + (a_2-a_1)b_2 \in \{-2, 2\}.$$

Notând cu $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ probabilitatea ca înainte de măsurători sistemul de două particule să fie în starea în care mărimile A_1, A_2, B_1, B_2 au valorile a_1, a_2, b_1, b_2 obţinem pentru valoarea medie $\mathbf{E}(A_1B_1+A_2B_1 + A_2B_2-A_1B_2)$ a mărimii $A_1B_1+A_2B_1 + A_2B_2-A_1B_2$ relaţiile

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(A_1B_1+A_2B_1+A_2B_2-A_1B_2) &= \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2} p(a_1,a_2,b_1,b_2)(a_1b_1+a_2b_1+a_2b_2-a_1b_2)\\
&\leq \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2} p(a_1,a_2,b_1,b_2)\cdot 2 = 2,\\
\mathbf{E}(A_1B_1+A_2B_1+A_2B_2-A_1B_2) &= \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2} p(a_1,a_2,b_1,b_2)a_1b_1\\
&+ \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2} p(a_1,a_2,b_1,b_2)a_2b_1\\
&+ \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2} p(a_1,a_2,b_1,b_2)a_2b_2\\
&- \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2} p(a_1,a_2,b_1,b_2)a_1b_2\\
&= \mathbf{E}(A_1B_1)+\mathbf{E}(A_2B_1)+\mathbf{E}(A_2B_2)-\mathbf{E}(A_1B_2),
\end{aligned}$$

din care rezultă *inegalitatea lui Bell*

$$\mathbf{E}(A_1B_1)+\mathbf{E}(A_2B_1)+\mathbf{E}(A_2B_2)-\mathbf{E}(A_1B_2)\leq 2.$$

9.5.36 Dacă în experimentul prezentat la pag. 322-**35**, în laboratorul **C** se prepară sisteme compuse din doi qubiţi în starea $|ß_2\rangle$, Alice măsoară observabilele

$$A_1=\sigma_3 \qquad \text{şi} \qquad A_2=\sigma_1,$$

şi Bob măsoară

$$B_1=\frac{-\sigma_3-\sigma_1}{\sqrt{2}} \qquad \text{şi} \qquad B_2=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sqrt{2}},$$

atunci conform mecanicii cuantice

$$\begin{aligned}
\langle A_1B_1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\langle ß_2|\sigma_3\otimes(-\sigma_3-\sigma_1)|ß_2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\\
\langle A_2B_1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\langle ß_2|\sigma_1\otimes(-\sigma_3-\sigma_1)|ß_2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\\
\langle A_2B_2\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\langle ß_2|\sigma_1\otimes(\sigma_3-\sigma_1)|ß_2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\\
\langle A_1B_2\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\langle ß_2|\sigma_3\otimes(\sigma_3-\sigma_1)|ß_2\rangle = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Se constată că

$$\langle A_1B_1\rangle+\langle A_2B_1\rangle+\langle A_2B_2\rangle-\langle A_1B_2\rangle=2\sqrt{2}>2,$$

adică, *inegalitatea lui Bell este violată*. Deoarece relaţia

$$\langle A_1B_1\rangle+\langle A_2B_1\rangle+\langle A_2B_2\rangle-\langle A_1B_2\rangle=2\sqrt{2}$$

este confirmată experimental, trebuie să admitem că cel puţin una dintre ipotezele, aparent rezonabile, utilizate pentru deducerea inegalităţii lui Bell nu este satisfăcută în cazul sistemelor cuantice. Stările neseparabile oferă ceva inexistent în fizica clasică. Ele reprezintă o importantă resursă, amplu exploatată în teoria cuantică a informaţiei (v. pag. 320-**32**, pag. 321-**34** şi [2, 17, 26]).

9.6 Evolutia în timp a stării unui sistem cuantic

9.6.1 Pentru orice sistem cuantic izolat există un operator autoadjunct H, numit *hamiltonianul sistemului*, astfel încât evoluţia în timp a stării sistemului este descrisă de ecuaţia

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

numită *ecuaţia Schrödinger*.

9.6.2 Dacă H nu depinde de timp, prin calcul direct, se constată că

$$\psi(q,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H}\psi(q,t_0)$$

verifică ecuaţia Schrödinger şi deci descrie evoluţia stării sistemului în funcţie de starea la momentul t_0. Operatorul $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H}$, numit *operator de evoluţie*, este un operator unitar

$$\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H}\right)^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_0)H^*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H} = I.$$

9.6.3 Dacă ψ_0 este o funcţie proprie a hamiltonianului sistemului

$$H\psi_0 = E_0\,\psi_0$$

şi dacă la momentul t_0 starea sistemului este descrisă de ψ_0

$$\psi(q,t_0) = \psi_0(q),$$

atunci starea sistemului nu variază în timp

$$\psi(q,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H}\psi_0(q) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)E_0}\psi_0(q)$$

Funcţiile proprii ale hamiltonianului descriu *stări staţionare* ale sistemului.

9.6.4 În cazul unui qubit cu hamiltonianul

$$H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad H = \omega\sigma_1 = \omega(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$$

şi deci, în baza computaţională $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, cu matricea

$$H = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

nivelele de energie sunt soluţiile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} -E & \omega \\ \omega & -E \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$E_{\pm} = \pm\omega.$$

Stările staţionare corespunzătoare sunt

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad \text{şi} \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Utilizând reprezentarea spectrală

$$H = \omega|+\rangle\langle +| - \omega|-\rangle\langle -|$$

obţinem că

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)}|+\rangle\langle +| + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t_0)}|-\rangle\langle -| \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad -1) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\omega(t-t_0) & -\mathrm{i}\,\sin\omega(t-t_0) \\ -\mathrm{i}\,\sin\omega(t-t_0) & \cos\omega(t-t_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

În reprezentare matriceală, plecând de la forma diagonală

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

obţinem

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)\omega} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_0)\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

adică reobţinem că

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H} = \begin{pmatrix} \cos\omega(t-t_0) & -\mathrm{i}\,\sin\omega(t-t_0) \\ -\mathrm{i}\,\sin\omega(t-t_0) & \cos\omega(t-t_0) \end{pmatrix}.$$

9.6.5 Starea la un moment t_0 determină complet evoluţia în timp a stării sistemului. Se admite că pentru fiecare $t\in\mathbb{R}$ există un operator unitar $U(t,t_0)$ astfel încât

$$\psi(q,t) = U(t,t_0)\,\psi(q,t_0),$$

pentru orice evoluţie posibilă $\psi(q,t)$ a stării sistemului cuantic considerat. Produsul scalar a două soluţii ale ecuaţiei Schrödinger nu variază în timp

$$\langle\psi_1(q,t),\psi_2(q,t)\rangle = \langle\psi_1(q,t_0),\psi_2(q,t_0)\rangle.$$

Două stări ortogonale la un moment t_0 rămân ortogonale la orice alt moment. Impunând ca $\psi(q,t)$ să verifice ecuaţia Schrödinger, obţinem ecuaţia

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,t_0) = H\,U(t,t_0). \tag{9.6}$$

Operatorii de evoluţie verifică relaţiile

$$U(t,t_0) = I \qquad \text{şi} \qquad U(t,t_0) = U(t,t_1)\,U(t_1,t_0).$$

9.6.6 Ştim că orice operator unitar este diagonalizabil şi că valorile lui proprii sunt unimodulare, adică de forma $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$, cu $\lambda\in\mathbb{R}$. Există o transformare unitară S astfel încât

$$U(t,t_0) = S^*\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_d} \end{pmatrix} S.$$

Din această relaţie rezultă că

$$U(t,t_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}A(t,t_0)},$$

unde $A(t,t_0)$ este operatorul autoadjunct

$$A(t,t_0) = S^*\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} S.$$

Operatorul unitar $U(t,t_0)$ verifică ecuaţia (9.6) şi condiţia $U(t_0,t_0)=I$ dacă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t,t_0)=-H \qquad \text{şi} \qquad A(t_0,t_0)=0.$$

În cazul în care H nu depinde de timp, reobţinem

$$U(t,t_0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)H}.$$

9.6.7 Spaţiul stărilor unei particule care se mişcă de-a lungul unei drepte este

$$L^2(\mathbb{R})=\left\{\Psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}\;\middle|\;\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(q)|^2\,dq<\infty\right\}$$

(spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil), operatorul coordonată este

$$\Psi\mapsto\hat{q}\Psi, \qquad \text{unde} \qquad (\hat{q}\Psi)(q)=q\,\Psi(q), \tag{9.7}$$

iar impulsul este descris de operatorul

$$\Psi\mapsto\hat{p}\Psi, \qquad \text{unde} \qquad \hat{p}\Psi=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}q}. \tag{9.8}$$

9.6.8 Legătura dintre variabilele complementare $\hat{q}$ şi $\hat{p}$ se poate exprima cu ajutorul transformării Fourier

$$\mathcal{F}[\Psi](p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq}\psi(q)\,dq.$$

Deoarece în cazul unei funcţii $\Psi\in L^2(\mathbb{R})$ avem $\lim_{q\to\pm\infty}\Psi(q)=0$, integrând prin părţi, obţinem relaţia

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[-\mathrm{i}\tfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}q}\right](p) &= \tfrac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq}\tfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}q}(q)\,dq\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq}\Psi(q)\,dq=p\,\mathcal{F}[\Psi](p)\end{aligned}$$

care se mai poate scrie

$$\mathcal{F}\,\hat{p}=\hat{q}\,\mathcal{F}$$

sau

$$\hat{p}=\mathcal{F}^{-1}\,\hat{q}\,\mathcal{F}. \tag{9.9}$$

9.6.9 În starea cuantică descrisă de funcţia normată Ψ, numărul

$$\int_a^b|\Psi(q)|^2\,dq$$

reprezintă probabilitatea de a găsi particula în intervalul $[a,b]$,

$$\int_a^b|\mathcal{F}[\Psi](p)|^2\,dp$$

probabilitatea ca impulsul particulei să aparţină intervalului $[a, b]$, iar

$$\langle \hat{q} \rangle = \langle \Psi, \hat{q}\, \Psi \rangle \qquad \text{şi} \qquad \langle \hat{p} \rangle = \langle \Psi, \hat{p}\, \Psi \rangle$$

reprezintă valorile medii ale coordonatei şi impulsului în starea Ψ.

9.6.10 Descrierea evoluţiei în timp a stării sistemului se reduce la găsirea hamiltonianului H şi rezolvarea ecuaţiei Schrödinger. În general, H este de forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}, t) = -\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} + V(q, t)$$

unde m este masa particulei iar $V(q, t)$ este energia potenţială.
Ecuaţia Schrödinger este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} + V(q, t)\Psi$$

În cazul în care H nu depinde de timp, stările staţionare

$$\Psi_n(q, t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tE_n}\Psi_n(q)$$

corespund funcţiilor proprii ale hamiltonianului

$$-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial q^2} + V(q)\Psi_n = E_n\Psi_n$$

iar evoluţia în timp a stării sistemului este descrisă de funcţia

$$\Psi(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tE_n}\Psi_n(q)$$

cu coeficienţii c_n determinaţi de condiţia ca $\Psi(q, t)$ să coincidă cu o stare dată, la un moment fixat.

9.6.11 O versiune foarte simplificată a sistemului cuantic prezentat se obţine admiţând că pentru particula considerată numărul de poziţii care se pot distinge este finit. Admitem că numărul poziţiilor ce pot fi distinse, $d{=}2s{+}1$, este impar şi utilizăm inelul $\mathbb{Z}_d{=}\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ al întregilor modulo d ca model matematic pentru descrierea lor. Alegând $\{-s, -s{+}1, ..., s{-}1, s\}$ ca o mulţime de reprezentanţi 'standard' pentru elementele lui $\mathbb{Z}_d$, stările sistemului cuantic considerat sunt descrise de spaţiul de funcţii

$$\ell^2(\mathbb{Z}_d) = \{\psi : \{-s, -s{+}1, ..., s{-}1, s\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \psi \text{ este funcţie }\},$$

care considerat împreună cu produsul scalar

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \sum_{n=-s}^{s} \overline{\psi_1(n)}\, \psi_2(n)$$

este un spaţiu Hilbert d-dimensional, izomorf cu spaţiul Hilbert standard $\mathbb{C}^d$. Spunem despre o funcţie $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}_d)$ că este normată dacă

$$||\psi|| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-s}^{s} |\psi(n)|^2} = 1.$$

Oricărei funcţii ψ neidentic nule îi corespunde funcţia normată $\frac{\psi}{||\psi||}$.

9.6.12 Asociem coordonatei operatorul (a se vedea (9.7))

$$Q : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \qquad (Q\psi)(n) = n\,\psi(n),$$

iar impulsului operatorul (a se vedea (9.9))

$$P : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \qquad P = F^{-1}QF = F^*QF,$$

unde F este transformarea Fourier finită

$$\ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d) : \psi \mapsto F[\psi], \qquad F[\psi](k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^{s} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} kn}\, \psi(n),$$

cu inversa

$$\ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d) : \psi \mapsto F^*[\psi], \qquad F^*[\psi](k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^{s} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{d} kn}\, \psi(n).$$

9.6.13 În cazul unei stări normate $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}_d)$, avem

$$|\psi(n)|^2 = \text{probabilitatea ca particula să se afle în punctul } \ n$$

şi

$$|F[\psi](k)|^2 = \text{probabilitatea ca particula să aibă impulsul } \ k.$$

Numărul

$$\langle Q \rangle = \langle \psi, Q\psi \rangle = \sum_{n=-s}^{s} \overline{\psi(n)}(Q\psi)(n) = \sum_{n=-s}^{s} n|\psi(n)|^2$$

reprezintă valoarea medie a coordonatei, iar

$$\langle P \rangle = \langle \psi, P\psi \rangle = \langle \psi, F^*QF\psi \rangle = \langle F[\psi], QF[\psi] \rangle = \sum_{n=-s}^{s} n|F[\psi](n)|^2$$

valoarea medie a impulsului în starea $|\psi\rangle$.

9.6.14 Pentru fiecare $m\in\{-s,-s+1,...,s-1,s\}$, funcţia

$$\psi_m:\{-s,-s+1,...,s-1,s\}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \psi_m(n)=\begin{cases}1 & \text{dacă} \quad n=m,\\ 0 & \text{dacă} \quad n\neq m\end{cases}$$

este funcţie proprie a operatorului coordonată Q

$$Q\psi_m = m\,\psi_m,$$

iar funcţia $\tilde{\psi}_m = F^{-1}[\psi_m]$, adică

$$\tilde{\psi}_m:\{-s,-s+1,...,s-1,s\}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \tilde{\psi}_m(k)=\frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}mk}$$

este funcţie proprie a operatorului impuls P

$$P\tilde{\psi}_m = F^{-1}QF\,F^{-1}[\psi_m] = m\,F^{-1}[\psi_m] = m\,\tilde{\psi}_m.$$

9.6.15 În starea ψ_m particula se află în punctul m

$$|\psi_m(n)|^2 = \begin{cases}1 & \text{dacă} \quad n=m,\\ 0 & \text{dacă} \quad n\neq m,\end{cases}$$

dar impulsul ei este complet nedeterminat

$$|F[\psi_m](n)|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}mn}\right|^2=\frac{1}{d},\qquad \forall n\in\{-s,-s+1,...,s-1,s\}.$$

Similar, în starea $\tilde{\psi}_m$ impulsul are valoarea m

$$|F[\tilde{\psi}_m](n)|^2 = |\psi_m(n)|^2 = \begin{cases}1 & \text{dacă} \quad n=m,\\ 0 & \text{dacă} \quad n\neq m,\end{cases}$$

dar poziţia particulei este complet nedeterminată

$$|\tilde{\psi}_m(n)|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}mn}\right|^2=\frac{1}{d},\qquad \forall n\in\{-s,-s+1,...,s-1,s\}.$$

9.6.16 Scriind $|n\rangle$ în loc de ψ_n şi $|\tilde{n}\rangle$ în loc de $\tilde{\psi}_n$ avem

$$Q=\sum_{n=-s}^{s} n|n\rangle\langle n|,\qquad F=\tfrac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n=-s}^{s}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn}\,|k\rangle\langle n|,$$

$$P=\sum_{n=-s}^{s} n|\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}|,\qquad F^*=\tfrac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n=-s}^{s}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn}\,|k\rangle\langle n|.$$

Sistemele de funcţii proprii $\{|n\rangle\}$ şi $\{|\tilde{n}\rangle\}$ ale lui Q şi P

$$Q|n\rangle = n|n\rangle, \qquad P|\tilde{n}\rangle = n|\tilde{n}\rangle$$

sunt baze ortonormate în $\ell^2(\mathbb{Z}_d)$

$$\sum_{n=-s}^{s} |n\rangle\langle n| = I \qquad \text{şi} \qquad \langle n|m\rangle = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n=m, \\ 0 & \text{dacă} \quad n\neq m, \end{cases}$$

$$\sum_{n=-s}^{s} |\tilde{n}\rangle\langle \tilde{n}| = I \qquad \text{şi} \qquad \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n=m, \\ 0 & \text{dacă} \quad n\neq m. \end{cases}$$

Deoarece

$$\langle \tilde{n}|\psi\rangle = \langle F^*[\psi_n], \psi\rangle = \langle \psi_n, F[\psi]\rangle = \langle n|F[\psi]\rangle,$$

orice element $|\psi\rangle \in \ell^2(\mathbb{Z}_d)$ se poate scrie sub forma

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^{s} |n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^{s} \psi(n)\,|n\rangle,$$

unde funcţia

$$\psi : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \psi(n) = \langle n|\psi\rangle$$

este $|\psi\rangle$ în reprezentarea coordonatelor şi sub forma

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^{s} |\tilde{n}\rangle\langle \tilde{n}|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^{s} F[\psi](n)\,|\tilde{n}\rangle,$$

unde funcţia

$$F[\psi] : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F[\psi](n) = \langle \tilde{n}|\psi\rangle$$

este $|\psi\rangle$ în reprezentarea impulsurilor.

9.6.17 Evoluţia în timp a stării sistemului cu hamiltonianul dependent de timp

$$H : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \qquad H = \frac{1}{2\mu} P^2 + \beta \cos(\omega t)\, Q,$$

poate fi analizată rezolvând ecuaţia Schrödinger

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

cu ajutorul programului MATHEMATICA. În Fig. 9.2, 9.3, 9.4 prezentăm evoluţia în timp a distribuţiei de probabilitate $|\Psi(n,t)|^2$ privind localizarea particulei în cazul în care la momentul $t=0$,

$$\Psi(n,0)=\begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n=-3, \\ 0 & \text{dacă} \quad n\neq -3, \end{cases}$$

adică particula se află în punctul $n=-3$. În partea de jos a Fig. 9.2, 9.3, 9.4 prezentăm evoluţia distribuţiei de probabilitate $|F[\Psi](k,t)|^2$ referitoare la impulsul particulei. Se observă că la momentul $t=0$ impulsul este complet nedeterminat, toate valorile posibile fiind egal probabile.

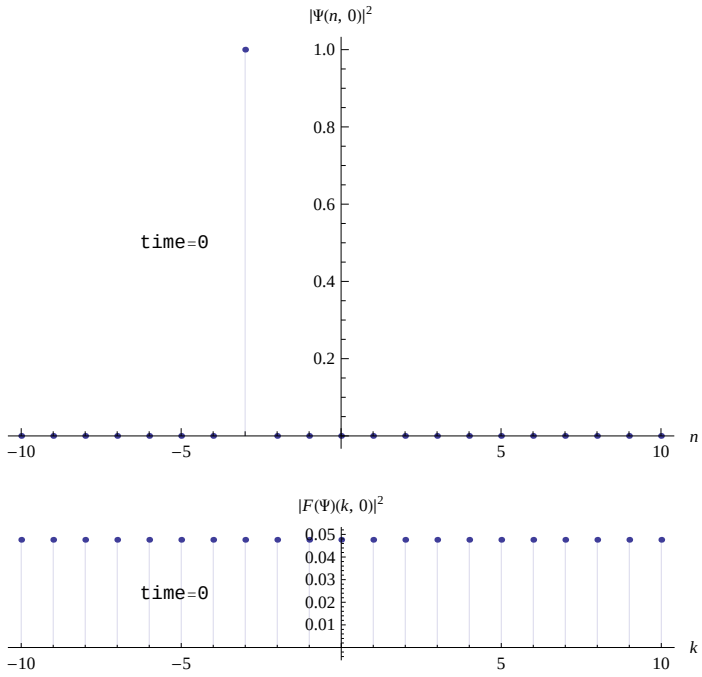

Figura 9.2: Distribuţia de probabilitate privind pozitia particulei şi distribuţia de probabilitate privind impulsul particulei la momentul $t=0$.

9.6.18 **MATHEMATICA**: Programul utilizat pentru a obţine Fig. 9.2, 9.3, 9.4

```
time = 0;   mu = 100; beta = 2; omega = 7; d = 21; s = (d - 1)/2
T[n_, m_] := N[(1/d ) Sum[k Exp[2 Pi I (n - m) k/d], {k, 1, d}]]
H[n_, m_, t_] := (1/(2 mu)) Sum[ T[n, k] T[k, m], {k, 1, d}] +
              beta n  Cos[omega t] DiscreteDelta[n - m]
eqns = {Table[psi[n]'[t] == Sum[- I H[n, m, t] psi[m][t],
              {m, 1, d}], {n, 1, d}], psi[8][0] == 1, Table[psi[n][0] == 0,
```

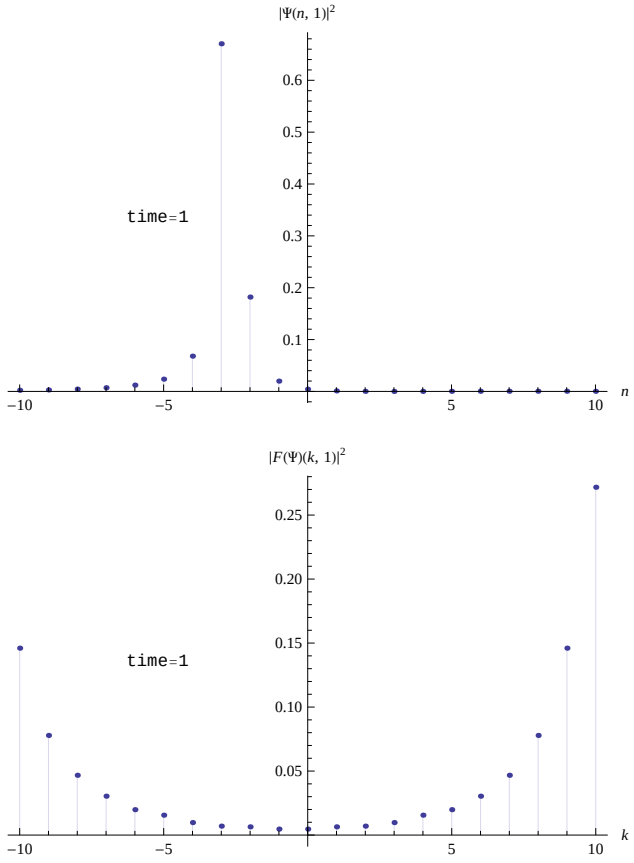

Figura 9.3: Distribuţia de probabilitate privind pozitia particulei şi distribuţia de probabilitate privind impulsul particulei la momentul $t = 1$.

```
              {n, 1, 7}], Table[psi[n][0] == 0, {n, 9, d}]}
ndsolve = NDSolve[eqns, Table[psi[n], {n, d}], {t, 10}]
Psi = Normalize[Table[Evaluate[Abs[psi[n][time]] /. ndsolve][[1]], {n, 1, d}]]
               ListPlot[Table[{n - s - 1, Psi[[n]]^2}, {n, 1, d}] ,
               Filling -> Axis, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All,
               PlotLegends -> Placed["time=0", {0.25, 0.5}],
               AxesLabel -> {n, Abs[\[CapitalPsi] [n, 0]]^2}]
FPsi[k_] := N[(1/Sqrt[d]) Sum[Exp[2 Pi I k n/d] Psi[[n]], {n, 1, d}]]
               ListPlot[Table[{n - s - 1, Abs[FPsi[n]]^2}, {n, 1, d}] ,
               Filling -> Axis, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All,
               PlotLegends -> Placed["time=0", {0.25, 0.5}], AspectRatio -> 0.2,
               AxesLabel -> {k, Abs[F[\[CapitalPsi]] [k, 0]]^2}]
```

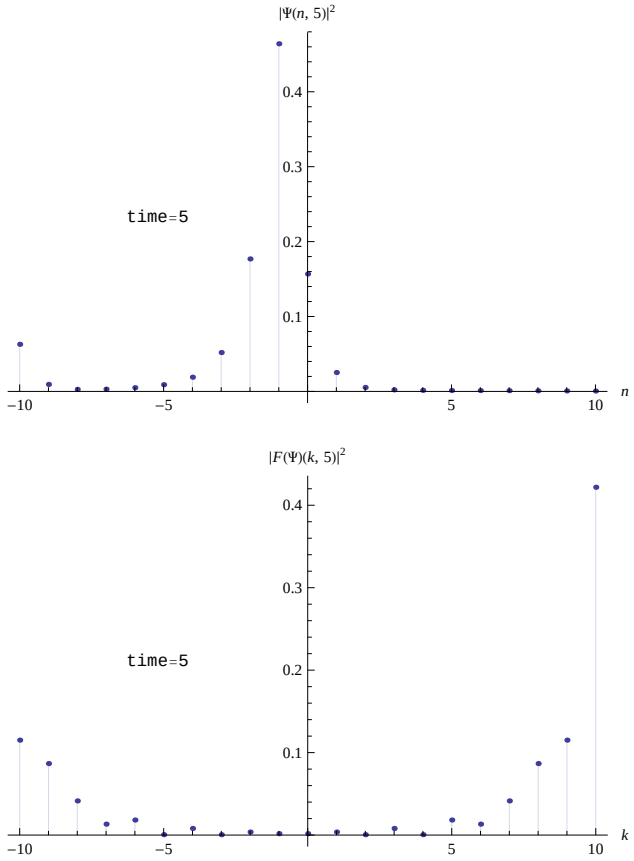

Figura 9.4: Distribuţia de probabilitate privind pozitia particulei şi distribuţia de probabilitate privind impulsul particulei la momentul $t = 5$.

9.6.19 Mulţimea $\{-s, -s+1, ..., s-1, s\}$ este spaţiul configuraţiilor sistemului iar

$$\{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \times \{-s, -s+1, ..., s-1, s\}$$

poate fi privită ca fiind spaţiul fazelor. *Funcţia Wigner discretă*

$$W : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \times \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

definită prin

$$W(n, m) = \frac{1}{d} \sum_{k=-s}^{s} \mathrm{e}^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{d} mk} \, \psi(n-k) \, \psi(n+k),$$

poate fi utilizată în locul funcţiei de undă

$$\psi : \{-s, -s+1, ..., s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Descrierea alternativă bazată pe utilizarea funcţiei Wigner oferă anumite avantaje atât în efectuarea unor calcule cât şi în interpretarea formalismului matematic.

9.7 Versiuni finit-dimensionale ale oscilatorului armonic

9.7.1 Utilizând relaţia (9.9), adică $\hat{p} = \mathcal{F}^{-1}\,\hat{q}\,\mathcal{F}$, hamiltonianul oscilatorului armonic

$$H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\hat{q}^2 = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} + \frac{1}{2}q^2$$

se mai poate scrie sub forma

$$H = \tfrac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\hat{q}^2\mathcal{F} + \tfrac{1}{2}\hat{q}^2 \qquad \text{sau} \qquad H = \tfrac{1}{2}\hat{p}^2 + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\hat{p}^2\mathcal{F}^{-1}.$$

9.7.2 Operatorul

$$H_1 : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \qquad H_1 = \frac{1}{2}F^{-1}Q^2F + \frac{1}{2}Q^2,$$

unde Q este operatorul coordonată

$$(Q\psi)(n) = n\,\psi(n),$$

şi F este transformarea Fourier finită

$$F[\psi](k) = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n=-s}^{s} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{d}kn}\,\psi(n),$$

este hamiltonianul unei versiuni finit-dimensionale a oscilatorului armonic. El este Fourier invariant, adică verifică relaţa $FH_1 = H_1F$ echivalentă cu

$$F^{-1}H_1F = H_1.$$

9.7.3 Operatorul cu diferenţe finite

$$P^2 : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \qquad (P^2\psi)(n) = -[\psi(n+1) - 2\psi(n) + \psi(n-1)]$$

este o versiune fint-dimensională a operatorului differenţial $\hat{p}^2 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}$, iar

$$H_2 : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \qquad H_2 = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}FP^2F^{-1},$$

este hamiltonianul unui oscilator finit, Fourier invariant şi cu valori proprii nedegenerate. Din relaţia

$$H_2\psi = \lambda\,\psi \quad \Longrightarrow \quad H_2(F\psi) = F(H_2\psi) = \lambda(F\psi)$$

rezultă că funcţiile proprii ale lui H_2 sunt în acelaşi timp funcţii proprii ale lui F. Funcţiile proprii normate h_0, h_1, ..., h_{2s} ale lui H_2, considerate în ordinea crescătoare a numărului alternanţelor de semn, se numesc *funcţii Harper*. Ele formează o bază ortonormată în $\ell^2(\mathbb{Z}_d)$ şi are loc relaţia

$$F = \sum_{n=0}^{2s} (-\mathrm{i})^n\, |h_n\rangle\langle h_n|$$

utilizată pentru a defini *transformarea Fourier fracţionară*

$$F^\alpha = \sum_{n=0}^{2s} (-\mathrm{i})^{n\alpha}\, |h_n\rangle\langle h_n|.$$

9.7.4 Dacă α se află într-o vecinătate suficient de mică a lui 1, atunci operatorii

$$H_{1,\alpha} = \frac{1}{2}F^{-\alpha}Q^2F^\alpha + \frac{1}{2}Q^2 \qquad \text{şi} \qquad H_{2,\alpha} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}F^\alpha P^2F^{-\alpha}$$

reprezintă versiuni deformate ale oscilatorilor H_1 şi H_2.

9.7.5 Utilizând stările coerente standard (v. pag. 123-**10**), hamiltonianul oscilatorului armonic se poate scrie sub forma [14]

$$H = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} dq\, dp \left(\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right) |q,p\rangle\langle q,p|$$

Deoarece frame-urile $\{|\alpha,\beta\rangle\}_{\alpha,\beta=-s}^{s}$ şi $\{|\alpha,\beta\rangle\rangle\}_{\alpha,\beta=-s}^{s}$ reprezintă versiuni finte ale sistemului de stări coerente standard, operatorii (v. pag. 182-**10**)

$$H_3 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{d} \sum_{\alpha,\beta=-s}^{s} \left(\tfrac{\alpha^2}{2} + \tfrac{\beta^2}{2}\right) |\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|,$$
$$H_4 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{d} \sum_{\alpha,\beta=-s}^{s} \left(\tfrac{\alpha^2}{2} + \tfrac{\beta^2}{2}\right) |\alpha,\beta\rangle\rangle\langle\langle\alpha,\beta|$$

sunt hamiltonienii unor versiuni finite ale oscilatorului armonic.

9.7.6 Când dimensiunea $d=2s+1$ creşte, valorile proprii ale operatorilor H_1, H_2, H_3, H_4 au tendinţa de a deveni echidistante (v. Fig. 9.5), iar funcţiile proprii de a semăna cu funcţiile proprii Hermite-Gauss ale oscilatorului armonic H.

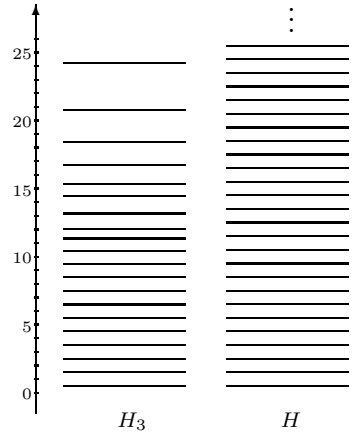

Figura 9.5: Valorile proprii ale operatorului H_3 (în cazul $d=21$) şi ale lui H.

Bibliografie

[1] I. Armeanu, *Analiză Funcţională*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1998.

[2] S. Barnett, *Quantum Information*, Oxford University Press, 2009.

[3] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg, E. M. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, 2003.

[4] D. Beklémichev, *Cours de Géométrie Analytique et d'Algèbre Linéaire*, Éditions Mir, Moscou, 1988.

[5] V. Brînzănescu, O. Stănăşilă, *Matematici Speciale. Teorie, Exemple, Aplicaţii*, Editura ALL EDUCATIONAL S. A., 1998.

[6] Liviu-Adrian Cotfas, A finite-dimensional quantum model for the stock market, Physica A **392** (2013) 371-380.

[7] Nicolae Cotfas and Daniela Dragoman, Properties of finite Gaussians and the discrete-continuous transition, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 425305.

[8] Nicolae Cotfas and Daniela Dragoman, Finite oscillator obtained through finite frame quantization, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 355301

[9] Nicolae Cotfas and Jean-Pierre Gazeau, Finite tight frames and some applications, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 193001

[10] N. Cotfas, J.-P. Gazeau and A. Vourdas, Finite-dimensional Hilbert space and frame quantization, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 175303.

[11] N. Cotfas şi L.-A. Cotfas, *Elemente de Analiză Matematică*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2010.

[12] N. Cotfas şi L.-A. Cotfas, *Complemente de Matematică I*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2012.

[13] N. Cotfas şi L.-A. Cotfas, Hypergeometric type operators and their supersymmetric partners, J. Math. Phys. **52** (2011) 052101

[14] J.-P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH, Berlin, 2009.

[15] S. J. Gustafson and I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, 2011.

[16] P. Hamburg, P. Mocanu şi N. Negoescu, Analiză Matematică (Funcţii complexe), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[17] G. Jaeger, *Quantum Information*, Springer Science & Business Media, 2007.

[18] J. F. James, *A Student's Guide to Fourier Transforms: With Applications in Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2011.

[19] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Analiză Funcţională*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[20] M. L. Mehta, 1987 Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 781

[21] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1961.

[22] W. Miller, Jr., *Lie Theory and Special Functions*, Academic Press, New York, 1968.

[23] G. Mocică , Probleme de Funcţii Speciale, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988.

[24] M. Naïmark, A. Stern, *Théorie des Représentations des Groupes*, Éditions Mir, Moscou, 1979.

[25] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele Algebrei*, vol I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

[26] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.

[27] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, and V. B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[28] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* , Springer, Berlin, 1986.

[29] D. Petz, *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*, Springer, 2008.

[30] M.-E. Piticu, M. Vraciu, C. Timofte, G. Pop, *Ecuaţii Diferenţiale. Culegere de Probleme*, Editura Universităţii Bucureşti, 1995.

[31] I. L. Popescu, I. Armeanu, D. Blideanu, N. Cotfas şi I Şandru, *Probleme de Analiză Complexă*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1995.

[32] R. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1978.

[33] M. Ruzzi, Jacobi θ-functions and discrete Fourier transform, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 063507.

[34] J.D. Talman, *Special Functions. A Group Theoretical Approach*, Benjamin, New York, 1968.

[35] C. Teleman, M. Teleman, *Elemente de teoria grupurilor cu aplicaţii în topologie şi fizică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

[36] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, Geometrie şi Ecuaţii Diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[37] N. Ja. Vilenkin, *Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes*, Dunod, Paris, 1969.

[38] N. J. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Special Functions and Integral Transforms*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.

[39] V. S. Vladimirov, *Ecuaţiile Fizicii Matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

[40] V. Vladimirov, *Distributions en Physique Mathématique* , Editions MIR, Moscou, 1979.

[41] V. S. Vladimirov şi alţii, *Culegere de Probleme de Ecuaţiile Fizicii Matematice*, Editura Ştiinţifcă şi Enciclopedică , Bucureşti, 1981.

[42] A. Vourdas, Quantum systems with finite Hilbert space, *Rep. Prog. Phys.* **67** (2004) 267-320.

[43] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Cambridge Mathematical Library: A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.